Fonds für Unterrichts- und Schulentwicklung
(IMST-Fonds)
S2 „Grundbildung und Standards“

Richtig Kommunizieren und Reflektieren Lernen im Rahmen der Differenzialrechnung

ID 675

Mag. Wolfgang NARRATH

BHAK Leibnitz

Leibnitz, Mai 2007

INHALTSVERZEICHNIS

ABSTRACT

Das vorliegende MNI-Projekt soll die Verständlichkeit der Zusammenhänge in einem Teilgebiet der Differenzialrechnung, dem Verlaufsaspekt, nachhaltig erhöhen. Unter dem Begriff „Verlaufsaspekt“ sollen Betrachtungen zu Ableitungsfunktionen, Monotonie, relative Extrempunkte, Krümmung und Wendepunkte verstanden werden. Durch Partner- und Gruppenarbeiten anhand von vorgegebenen Arbeitsblättern und einem Stationenbetrieb sollen Reflexions- und Kommunikationsprozesse bei den SchülerInnen eingeleitet, Zusammenhänge klar gemacht und die Anwendbarkeit der Differenzialrechnung in Naturwissenschaften, Technik und Wirtschaft betont werden. Zur besseren Darstellung der Zusammenhänge dienen Animationen mit Mathematica - Movies und zur Auslagerung von komplizierten Berechnungen wird das CAS „ Mathematica“ verwendet.

Schulstufe: 12. Schulstufe

Fächer: Mathematik und angewandte Mathematik

Kontaktperson: Mag. Wolfgang NARRATH

Kontaktadresse: BHAK Leibnitz, Klostergasse 18, 8430 Leibnitz

Wolfgang.narrath@gmx.at

1 EINLEITUNG

1.1 Die Kurvendiskussion im Wandel der Zeit

Die Kurvendiskussion war immer schon ein wesentlicher integrativer Teil der Differenzialrechnung des Mathematikunterrichtes. In der Zeit vor der Einführung von grafikfähigen Taschenrechnern und Computern im Unterricht lag ihre Aufgabe unter anderem darin, die nötigen Daten (Punkte) für das händische Zeichnen einer Funktionskurve zu liefern. Der Schwerpunkt lag beim schemahaften Berechnen aller möglichen besonderen Punkte einer Funktionskurve und somit speziell beim Lösen von Gleichungen. Oft wurde – natürlich auch aus zeitlichen Gründen - wenig Wert auf Interpretationen der Ergebnisse gelegt. Praktische Anwendungen kamen dabei meistens überhaupt zu kurz. Die meiste Zeit wurde in das Erlernen von teilweise komplizierten Ableitungsregeln, in das analytische Lösen von Gleichungen und in das händische Zeichnen von Funktionsgraphen investiert. Kurzum: Es wurde eine Art von „MiniexpertInnenausbilung“ betrieben.

$4a.3\sqrt{3} - 12a^2\sqrt{3} = 0$

$12\sqrt{3}a(1 - a) = 0 \qquad a = 0 \qquad a = 1$

$K_1: y = \dfrac{x - x^3}{x^2 + 1}$

$y = \dfrac{x - x^3}{x^2 + 1} \qquad \dfrac{x - x^3}{x^2 + 1} = 0 \qquad x(1 - x^2) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = -1$

$N_1(0/0) \qquad N_2(1/0) \qquad N_3(-1/0)$

$y' = \dfrac{-x^4 - 4x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

$-x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \qquad x^2 = u$

$u^2 + 4u - 1 = 0$

${}_1u_2 = -2 \pm \sqrt{5}$

$u_1 = 0{,}24 \qquad x_1 = 0{,}49$

$(u_2 = -4{,}24) \qquad x_2 = -0{,}49$

$E_1(0{,}49/0{,}3)$ Max $\qquad E_2(-0{,}49/-0{,}3)$ Min

$y'' = \dfrac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3} = \dfrac{4x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$

$y''(0{,}49) = -2{,}83 < 0 \qquad y''(-0{,}49) = 2{,}83 > 0$

$4x(x^2 - 3) = 0 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt{3} \qquad x_3 = -\sqrt{3}$

$W_1(0/0) \qquad W_2(\sqrt{3}/-0{,}82) \qquad W_3(-\sqrt{3}/0{,}82)$

$y = \dfrac{-x^3 + x}{x^2 + 1} = -x + \dfrac{2x}{x^2 + 1} \qquad$ Asymptote: $y = -x$

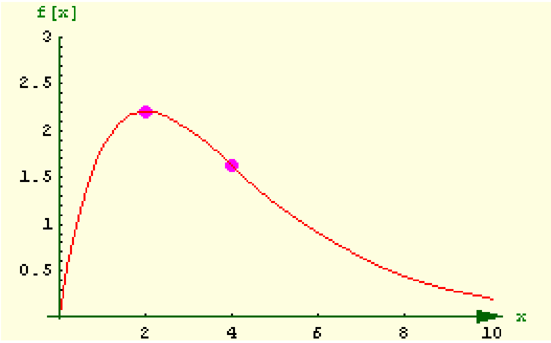
symmetrisch bezüglich Ursprung

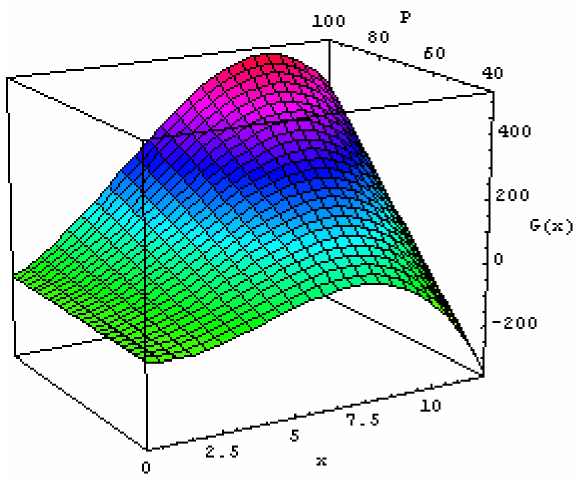
Dieser Weg erscheint heute – im technologischen, arbeitsteiligen Zeitalter – nicht mehr sinnvoll.

In unserer arbeitsteiligen Welt kann niemand mehr Experte / Expertin auf allen Fachgebieten sein. Vielmehr müssen Höher Gebildete versuchen, sich in möglichst vielen Fachgebieten ein fundiertes reflektiertes Grundwissen anzueignen, um sich mit ExpertInnen verständigen zu können, um deren Expertisen zu verstehen und um deren Erkenntnisse einer Allgemeinheit mitteilen zu können.

Auf die Ausbildung im Fachgebiet Differenzialrechnung (aber auch in anderen Gebieten der Mathematik) in den allgemein - und berufsbildenden höheren Schulen umgemünzt könnte dies Folgendes bedeuten:

* Das Erlernen von unverzichtbaren Grundwissensaspekten und der reflektierte Umgang mit diesen.
* Die Auslagerung von komplizierten Berechnungen an ein Expertensystem (CAS).
* Die Kommunikation mit diesem Expertensystem (richtige Eingabe und sinnvolle Interpretation der Ergebnisse),
* Eine Kommunikation in den Arbeitsgruppen, sowie das Trainieren der Fähigkeit, die gewonnenen Erkenntnisse einer Allgemeinheit mitteilen zu können.





1.2 Probleme im Unterricht und erste Lösungsansätze

Nach meiner Erfahrung haben die SchülerInnen oft Probleme, die wesentlichen Aussagen der Differenzialrechnung zu verstehen und richtig zu deuten. Der Sinn der Berechnungen sowie deren Ergebnisse werden mitunter schlecht oder gar nicht verstanden. Immer wieder „verstecken“ sich die SchülerInnen hinter langen Berechnungen, ohne das Ergebnis interpretieren zu können und somit erfasst zu haben. Insgesamt besteht somit Handlungsbedarf, diese Kommunikationsfähigkeit und das tiefere Verständnis für diese Zusammenhänge (= Reflexion) zu verbessern.

Dieses Projekt über die Kommunikationsfähigkeit im Gebiet der Differenzialrechnung tangiert sowohl die inhaltlichen als auch die methodischen Leitlinien des Schwerpunkts „Grundbildung und Standards“.

Das Wissen über die der Differenzialrechnung innewohnenden globalen Idee der Veränderung und die Beherrschung derselben bildet einen wichtigen Beitrag für Alltagsbewältigung, Weltverständnis sowie Studierfähigkeit. Man denke dabei etwa an den Zusammenhang zwischen dem erzielten Erlös und der verkauften Menge einer Ware eines Betriebes, bei einem variablen Marktpreis.

Ich arbeite mit unterschiedlichen Kontexten und authentischen, anwendungsorientierten Situationen. So werden Problemstellungen aus Wirtschaft, Physik, Biologie, Medizin und Technik verwendet. Im medizinischen Beispiel etwa geht es um die Beschreibung der Veränderung der Konzentration von Medikamenten im Körper eines Menschen.

Die SchülerInnen werden in diesem Projekt in Arbeitsgruppen, durch Instruktionen (Lehrervorträge, Beschreibungen) und in Form eines Stationsbetriebes mit den wesentlichen Erkenntnissen der Differenzialrechnung konfrontiert.

Das Konzept von R. Fischer über die „Höhere Allgemeinbildung“ soll im Rahmen der Differenzialrechnung – insbesondere beim Verlaufsaspekt (Ableitungsfunktion, Monotonie, relative Extrempunkte, Krümmung und Wendepunkte) erprobt und auch realisiert werden.

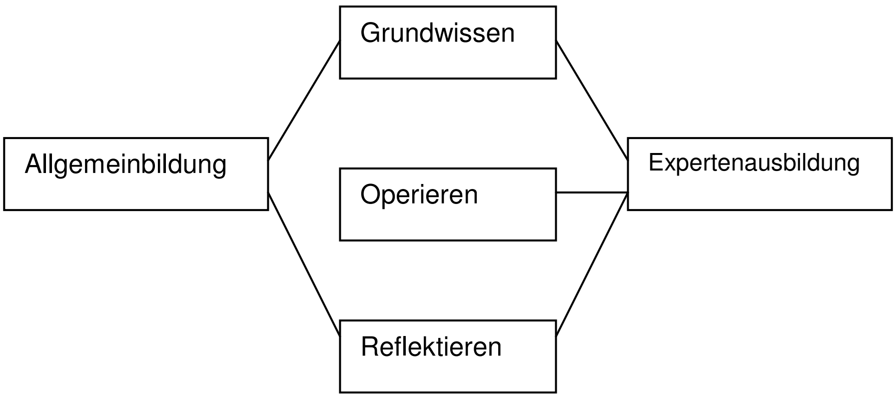
Im Unterricht soll das dafür nötige Grund – und Reflexionswissen erarbeitet werden.

Dieses reflektierte Grundwissen, welches für eine gedeihliche Kommunikation mit ExpertInnen (Personen, Bücher, Computerprogramme) vonnöten ist, soll im Unterricht durch gezielt eingesetzte Arbeitsaufträge und Sozialformen nachhaltig entwickelt werden.

Umfangreiche Berechnungen sowie graphische Darstellungen werden an das CAS „Mathematica“ ausgelagert

1.3 Das Fischer – Konzept der Höheren Allgemeinbildung

Der Aufbau dieses MNI - Projektes mit seinen Teilzielen fokussiert auf das Fischer Konzept der Höheren Allgemeinbildung:



Fischer sieht die Rolle eines / einer allgemeingebildeten Laien / Laiin sehr stark mit den Kompetenzen des Grundwissens und der Reflexion verbunden. Dieser / Diese soll zwischen ExpertInnen und der Allgemeinheit Wissen vermitteln können. Er / Sie soll verstehen, was die Expertisen der ExpertInnen meinen, soll diesen sinnvolle Fragen stellen können und soll dieses Wissen auch in Richtung Allgemeinheit – entsprechend transformiert - transportieren können. Er / Sie muss also kommunizieren können.

Demzufolge treten bei diesem vorliegenden Unterrichtskonzept operative Elemente sehr stark in den Hintergrund (werden tlw. an CAS ausgelagert), während kommunikative, reflektive Elemente sehr stark in den Vordergrund treten. Natürlich müssen auch wesentliche Grundwissensaspekte vorhanden sein, um diese Kommunikationsfähigkeit zwischen gebildeten Laien / Laiin und den Experten bzw. der Allgemeinheit bilden zu können.

Dieser Unterricht unterscheidet sich von einem konventionellen, klassischen Unterricht in der Auswahl der relevanten Grundwissensaspekte, in der Verknüpfung dieser Grundwissensaspekte mit kommunikativen Elementen, in der Betonung der Reflexion, in den vorherrschenden Sozialformen des Unterrichts (Partner- und Gruppenarbeiten, Diskussionen) sowie durch stattfindende Aushandlungen.

1.4 Die Ziele dieses MNI – Projektes

Dieses Projekt soll dazu dienen, einen verständnisorientierten, reflektierten und kommunikativen Umgang der SchülerInnen mit wesentlichen Grundwissenselementen des Verlaufsaspektes der momentanen Änderungsrate zu organisieren.

Konkret sollen die folgenden 4 Teilziele mit diesem MNI – Projekt erreicht werden:

Teilziel 1:

Die SchülerInnen sollen über grundlegende Vorstellungen über die Begriffe des Verlaufsaspektes verfügen und diese auch kommunizieren können.

Zu diesen Begriffen zählen:

* Ableitungsfunktionen
* Monotonie (wachsend, fallend)
* relative Extrema (rel. Hochpunkte, rel. Tiefpunkte)
* Krümmung (positiv - progressiv, negativ – degressiv)
* Wendepunkte

Teilziel 2:

Die SchülerInnen sollen die oben angeführten Begriffe in vorgegebenen Funktionskurven auffinden und interpretieren können.

Teilziel 3:

Die SchülerInnen sollen die oben angeführten Begriffe aus einfachen Funktionsgleichungen (Polynomfunktionen zweiten und dritten Grades) händisch (d.h. mit Hilfe von einfachen Taschenrechnern) berechnen, identifizieren und interpretieren können.

Teilziel 4:

Die SchülerInnen sollen in Kleingruppen (Partnerarbeit) eine Anwendungsfunktion aus den Bereichen Physik, Biologie, Medizin, Technik bzw. Wirtschaft mit Hilfe eines CAS (Mathematica) in Hinblick auf den Verlaufsaspekt untersuchen, interpretieren, reflektieren und darüber kommunizieren können.

2 DIE DARSTELLUNG DES PROJEKTABLAUFES

Dieses MNI – Projekt wurde im Schuljahr 2006 / 2007 zwischen Jänner und April an der BHAK Leibnitz im 4 C Jahrgang durchgeführt. Dieser 4 C Jahrgang bestand aus 12 Schülerinnen und aus 11 Schülern im Alter zwischen 17 und 19 Jahren. Von den zwei Wochenstunden aus Mathematik fand eine Unterrichtsstunde im IT – Saal statt.

Das Vorwissen der SchülerInnen auf dem Gebiet der Differenzialrechnung:

Den SchülerInnen wurde vor diesem Projekt ein Unterricht über die mittlere – und über die momentane Änderungsrate (punktueller Aspekt) erteilt. Der Umgang mit dem CAS „Mathematica“ war den SchülerInnen bereits vertraut.

2.1 Der Projektablauf

1. Unterrichtseinheit:
Vorstellung der einzelnen unterschiedlichen Problemstellungen (Wirtschaft, Physik, Biologie, Medizin und Technik).
Bildung von Arbeitsgruppen mit jeweils 3 SchülerInnen; jede Arbeitsgruppe bekam eine von ihr ausgesuchte Problemstellung (Arbeitsblatt); jede Problemstellung wurde von mindestens 2 Arbeitsgruppen bearbeitet;
Alle Arbeitsgruppen sollten „ihre“ Funktionskurve auf Monotonie, rel. Hochpunkt, rel. Tiefpunkt, Krümmung und Wendepunkte hin untersuchen, wobei diese Begriffe zunächst nur umgangssprachlich – aus der jeweiligen Sicht der Gruppe – geklärt und verwendet wurden.
Am Ende der UE präsentierten die Arbeitsgruppen ihre Erkenntnisse im Plenum; die anderen Arbeitsgruppen und der Lehrer ergänzten und korrigierten wenn erforderlich. Daraus ergab sich die Notwendigkeit, genauere Methoden zur Bestimmung dieser Begriffe zur Verfügung zu haben.

2. Unterrichtseinheit:
Einführung der Ableitungsfunktion als wichtiges Instrument zur Verlaufsuntersu-

chung.
Mit Experimenten in Zweiergruppen und Zusammenführung dieser Ergebnisse im Plenum wurde die Ableitungsfunktion entwickelt, abschließend analytisch berechnet und mit dem Computerprogramm grafisch dargestellt.

3. Unterrichtseinheit:
Klärung des Begriffes der Monotonie mit den Werkzeugen der Differenzialrechnung.
(Lehrervortrag mit CAS – Unterstützung)

4. Unterrichtseinheit:
Klärung des Begriffes der rel. Extrempunkte mit den Werkzeugen der Differenzialrechnung.
(Lehrervortrag mit CAS – Unterstützung)

5. Unterrichtseinheit:
Klärung des Begriffes der Krümmung und des Wendepunktes mit den Werkzeugen der Differenzialrechnung.
(Lehrervortrag mit CAS – Unterstützung)

Vergabe eines Arbeitsauftrages als Hausübung:
Ein Zeitungsartikel über den Verlaufsaspekt war für die Allgemeinheit zu schreiben. Es sollten keine Berechnungen darin vorkommen, sondern nur die wichtigen Begriffe möglichst einfach erklärt werden. (Länge: ca. 1 DIN A4 Seite mit WORD)

Ursprünglich war es geplant, die Inhalte der gehaltenen UE 3 – UE 5 in einer einzigen UE durchzuführen. Probleme mit dem Beamer, Prüfungstätigkeiten und organisatorische Belange führten aber zur Aufspaltung.

6. Unterrichtseinheit:
Stationenbetrieb:
Die SchülerInnen organisierten sich in 3-er und 4-er Gruppen und bearbeiteten 4

Stationen (die tlw. doppelt vorhanden waren). Jede Gruppe durchlief 2 Stationen pro Unterrichtseinheit.

Station 1: Herleitung von Ableitungsregeln (Experimente mit dem CAS Mathemati ca).

Station 2: Experimente zu Monotonie und rel. Extrempunkte. Schriftliche Kurzberich te.

Station 3: Experimente zu Krümmung und Wendepunkte. Schriftliche Kurzberichte.

Station 4: Spiele zum Verlaufsaspekt (Funktions- UNO, Reiterspiel)
An dieser Station wurde versucht, auf spielerische Art die Begriffe des Ver laufsaspektes den SchülerInnen nahezubringen. Dafür wurde ein Karten-spiel entwickelt (Funktions-UNO) und ein Würfelspiel aus der didaktischen Literatur übernommen.

[Schülerinnen beim Arbeiten an der Station 1 (Entwicklung der Ableitungsregeln)]

[Schüler beim „Kartenspielen“ (Funktions-Uno – Diskussion um Kurveneigenschaften)]

7. Unterrichtseinheit:
Stationenbetrieb (s.o.)

8. Unterrichtseinheit:
Besprechung der Ergebnisse und Erkenntnisse des Stationsbetriebes im Plenum.

9. Unterrichtseinheit:
Vorstellung eines Musterbeispiels zum Thema Kostenfunktion mit dem CAS Mathematica. Ausweitung der Werkzeuge des Verlaufsaspektes auf Parameterfunktionen. 3-D Darstellung der Parameterfunktion.

10. Unterrichtseinheit:
Die Arbeitsgruppen von der 1. Unterrichtseinheit bekamen nochmals „ihre“ Funktionskurve. Diesmal jedoch als Parameterfunktion und mit speziellen Arbeitsaufträgen, die teilweise interpretativ (durch Beschreibungen und Erklärungen) und teilweise rechnerisch sowie grafisch (3D) mit dem CAS Mathematica durchzuführen waren.

Diese Aufträge waren innerhalb eines angemessenen Zeitraumes (1 – 2 Wochen) zu erfüllen, schriftlich zu dokumentieren und abzugeben.

Dazwischen:
Händisches Rechnen zum Thema Verlaufsaspekt (Teilziel 3)
Arbeiten mit Funktionssteckbriefen (Umkehraufgaben)
Übungen für die 2. Schularbeit
2. Schularbeit zum Thema Verlaufsaspekt
Rückgabe, Besprechung und Verbesserung der 2. Schularbeit

17. April:

Erteilung eines Arbeitsauftrages zur Gestaltung einer Plakatvorlage zum Thema Verlaufsaspekt. Dieser Auftrag wurde von Gruppen zu jeweils 4 SchülerInnen in dieser UE durchgeführt.

3 DIE EVALUIERUNG DIESES PROJEKTES

3.1 Die Evaluierungsinstrumente

Die folgenden Arbeitsaufträge wurden als Evaluierungsinstrumente verwendet und dienten somit zum Überprüfen der Projektteilziele

Schreiben eines Zeitungsartikels

Die 2. Schularbeit

Entwurf eines Plakates

Gruppenarbeiten (Kleinprojekte) zum Verlaufsaspekt

3.2 Die Evaluierung der Teilziele

3.2.1 Teilziel 1

Teilziel 1:

Die SchülerInnen sollen über grundlegende Vorstellungen über die Begriffe des Verlaufsaspektes verfügen und diese auch kommunizieren können.

Zu diesen Begriffen zählen:

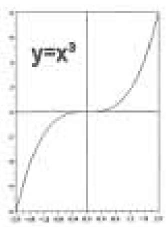
* Ableitungsfunktionen
* Monotonie (wachsend, fallend)
* relative Extrema (rel. Hochpunkte, rel. Tiefpunkte)
* Krümmung (positiv - progressiv, negativ – degressiv)
* Wendepunkte

3.2.1.1 Das Schreiben eines Zeitungsartikels

Der Klasse wurde am 6. 2. 2007 der Auftrag erteilt (HÜ), einen fiktiven (für die Allgemeinheit verständlichen) Zeitungsartikel über den Verlaufsaspekt zu schreiben. Als Länge wurde etwa eine DIN A 4 Seite vereinbart. Dieser Auftrag wurde von 21 SchülerInnen erfüllt. Die Qualität der Artikel wurde mit 3 Punkten, 2 Punkten und 1 Punkt beurteilt.
Anschließend nun eine Auswahl von zwei Artikeln:

Die Verlaufsaspekte

Gute Mathematiker werden von vielen Menschen beneidet. Sie kennen sich perfekt mit Formeln aus, haben für (nahezu) jede Frage aus dem Alltag eine gute Antwort und es scheint so als hätten sie immer den Durchblick. Vor allem beschäftigen sie sich aber mit Formeln, für welche „normale" Menschen keine Bedeutung finden. Doch man kann die Mathematik auch ohne Zahlen erklären wie zB die Verlaufsaspekte der Mathematik. Diese sind ein sehr wichtiger Bestandsteil der Mathematik und dienen zur genauen Analyse von Funktionskurven. Zu den Verlaufsaspekten gehören die Monotonie, die relativen Extreme, die Krümmung und der Wendepunkt, welche sich ganz einfach erklären lassen:

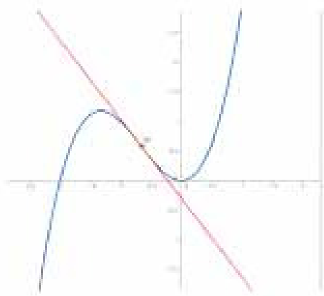


Wie der Name **Monotonie** schon sagt handelt es sich um Eintönigkeit bzw. Gleichförmigkeit.

Wenn eine Funktion also dauernd steigt nennt man sie monoton steigend, ist das Gegenteil der Fall nennt man sie monoton fallend.

Laien können wohl auch mit dem Wort **„relative Extreme"** nicht sehr viel anfangen, jedoch kann man diese ganz einfach auch relativer Hochpunkt bzw. Tiefpunkt nennen, womit den meisten wohl schon geholfen ist. Es handelt sich dabei schlicht und einfach um den größten oder kleinsten Wert, den die Funktion annimmt.

Ein **Wendepunkt** ist der Punkt in einer Kurve, an dem die Kurve von einer Links- in eine Rechtskurve oder umgekehrt geht. Der Wendepunkt kann auch einfach Bogenwechsel genannt werden.



Bei der **Krümmung** ist eigentlich nur anzumerken, das eine nach links gekrümmte Kurve eine positive Krümmung bedeutet und eine nach rechts gekrümmte Kurve eine negative Krümmung bedeutet.

[Michael K.]

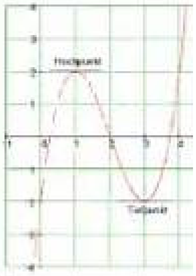
Verlauf einer Funktion

Jede Funktion kann man grafisch darstellen. Dabei ist der Verlauf der Funktion ausschlaggebend. Um den Verlauf grafisch und rechnerisch darstellen zu können benötig es bestimmte Funktionsmerkmale: Monotonie, Extrempunkte und Wendepunkte.

Monotonie

Bei der Monotonie unterscheidet man monoton steigend und monoton fallend.

- Man spricht von" *monoton steigend*", wenn die Funktionswerte von links nach rechts beständig zunehmen.
- Von „*monoton fallend*" spricht man, wenn die Funktionswerte von links nach rechts beständig abnehmen.



Extrempunkte

Unter Extremwerte einer Funktion versteht man die Hoch - bzw. Tiefpunkte eines Graphen.
Der Extrempunkt ist jener, bei dem die Steigung des Graphen Null ist. Somit ist die Tangente waagrecht.

Monotonie und Extempunkte können mit der 1. Ableitung der Funktion berechnet werden.

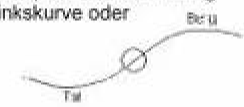
Krümmung

Die Krümmung einer Funktion kann in einen „progressiver Verlauf" und einen „degressiven Verlauf" eingeteilt werden.

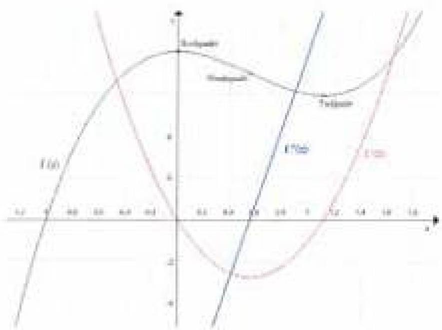
- *Ein „degressiver Verlauf" ist gegeben, wenn der Graph* eine Rechtskurve macht bzw. die Drehung der Kurve im Uhrzeigersinn stattfindet.
- Ein „progressiver Verlauf" ist gegebne, wenn der Graph eine Linkskurve macht bzw. die Drehung der Kurve gegen den Uhrzeigersinn stattfindet.

Wendepunkt

Der Wendepunkt ist ein Punkt auf der Funktions, an welchem der Graph seine Krümmung ändert. Ein Graph wechselt entweder von einer Rechts- in einer Linkskurve oder umgekehrt.



Die Krümmung und der Wendepunkt können mit Hilfe der 2. Ableitung berechnet werden.



Beispiel für eine Funktion samt Hoch-, Tief- und Wendepunkt. In rot: 1. Ableitung, in blau: 2. Ableitung

[Stefanie F.]

3.2.1.2 Das 2. Beispiel aus der 2. Schularbeit

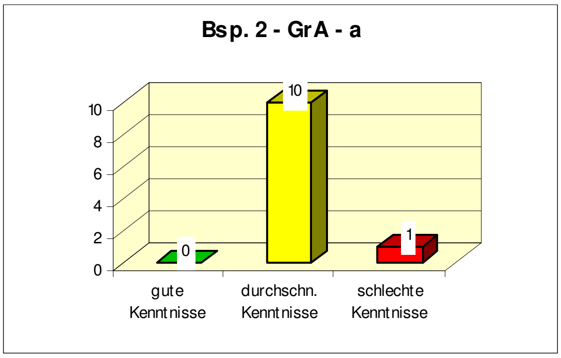
Diese Schularbeit wurde am 23. 3. 2007 von 22 SchülerInnen mitgeschrieben.
In diesem 2. Beispiel ging es um die Beschreibung, Erklärung und um Eigenschaften von einigen Begriffen des Verlaufsaspektes. Die Art der Qualität der Beantwortung der einzelnen Fragen wurde mit jeweils maximal 2 Punkten beurteilt. Somit ergaben sich die folgenden Beurteilungsstufen:

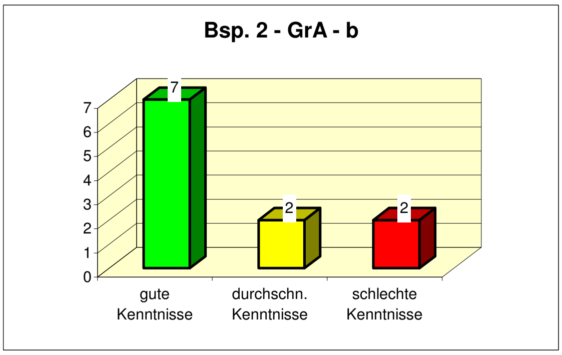
* Gute Kenntnisse bei 2 Punkten

* Durchschnittliche Kenntnisse bei 1 Punkt

* Schlechte Kenntnisse bei 0 Punkten

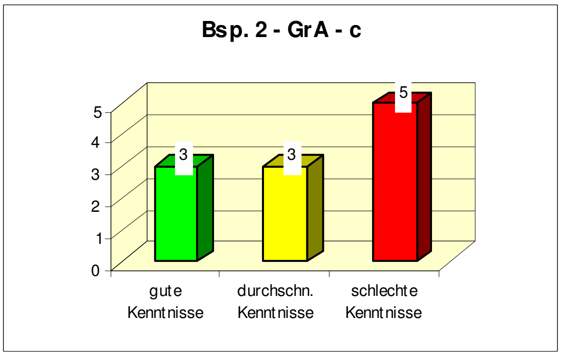
Bsp.2 – GrA - a) Erklären Sie den Begriff „Monoton steigend“!

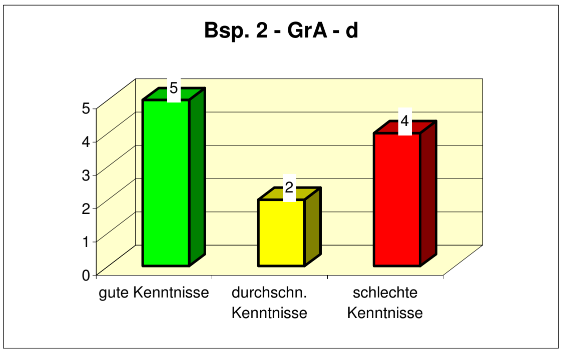




Bsp.2 – GrA - b) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der zweiten Ableitung und der Krümmung?

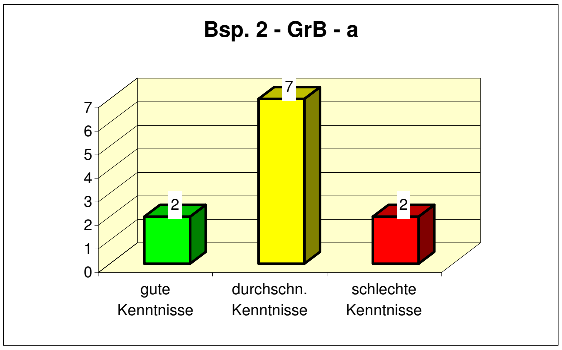
Bsp.2 – GrA - c) Welche Eigenschaften besitzt ein rel. Tiefpunkt?

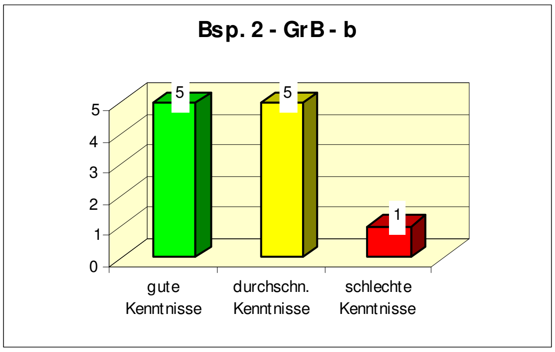




Bsp.2 – GrA - d) Was wird durch die erste Ableitungsfunktion ausgedrückt?

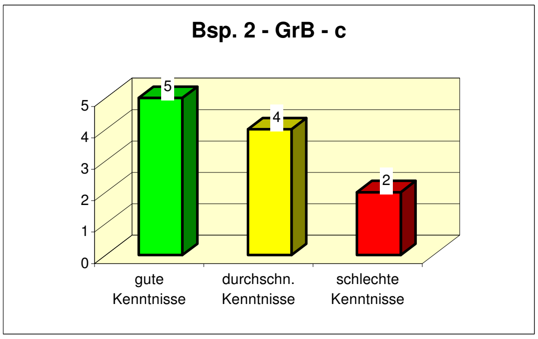
Bsp.2 – GrB - a) Erklären Sie den Begriff „Monoton fallend“!

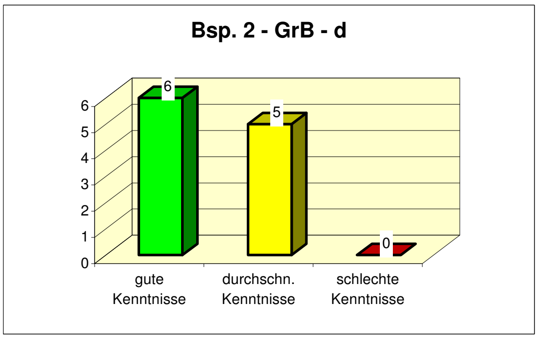




Bsp.2 – GrB - b) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der zweiten Ableitung und der Krümmung?

Bsp.2 – GrB - c) Welche Eigenschaften besitzt ein rel. Hochpunkt?

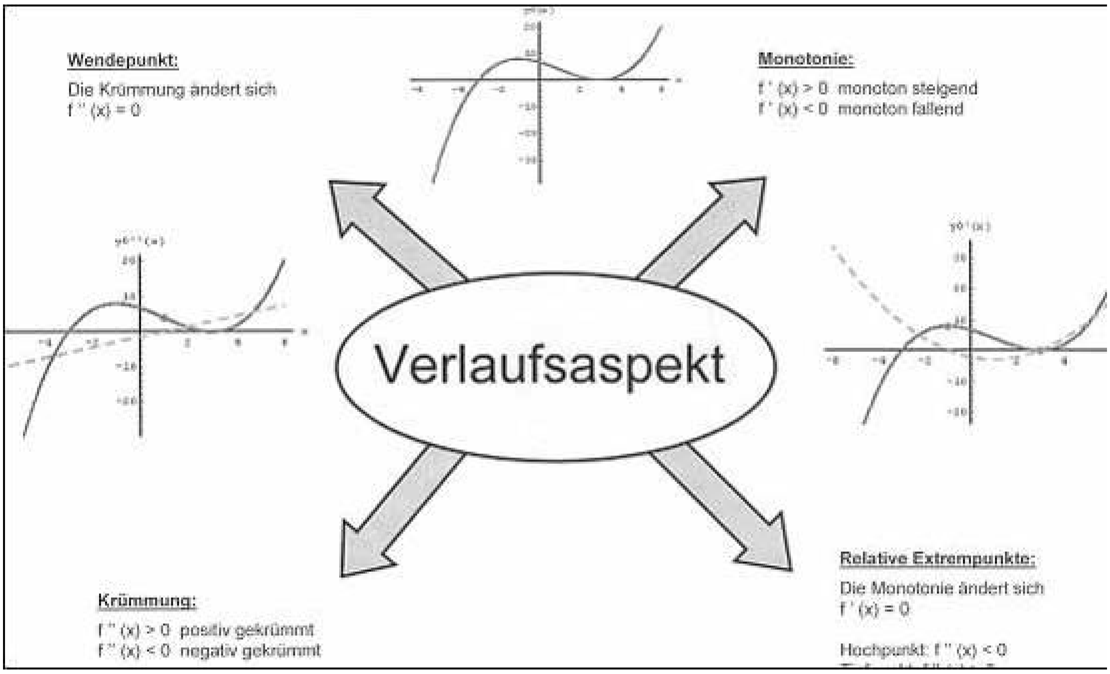




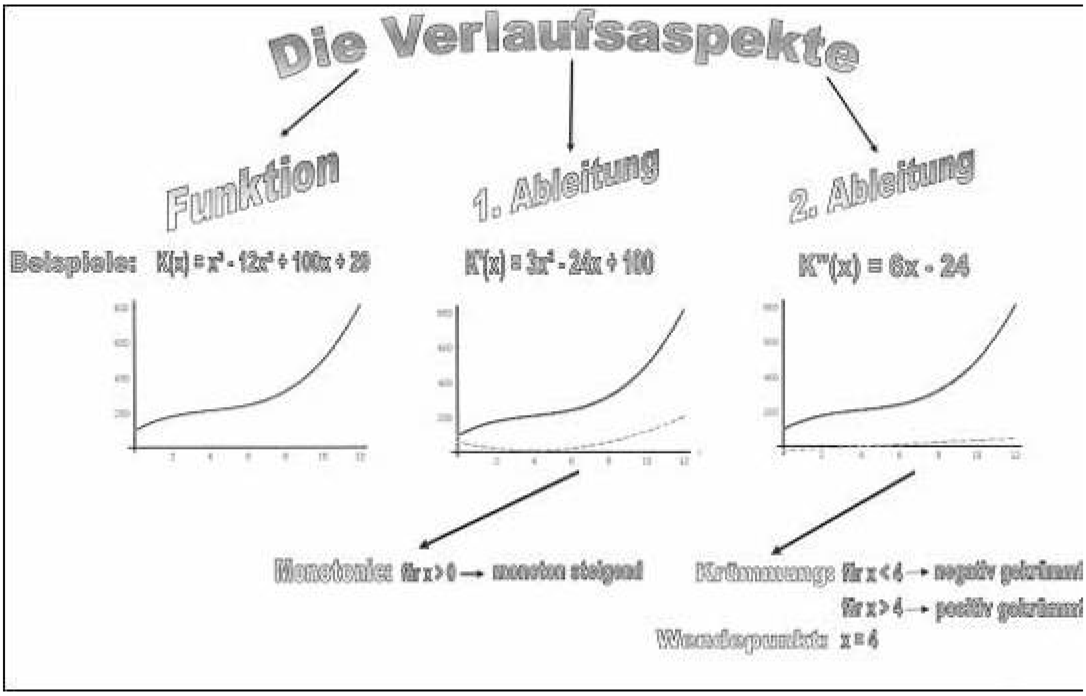
Bsp.2 – GrB - d) Welche Eigenschaften besitzt ein Wendepunkt?

3.2.1.3 Die Gestaltung eines Plakates zum Verlaufsaspekt

Am 17. April 2007 wurde die Klasse aufgefordert, sich in Gruppen zu 4 Personen zu überlegen, wie ein Plakat mit den wichtigsten Begriffen zum Verlaufsaspekt aussehen könnte. Dies erforderte einen Aushandlungsprozess, da ja auf einem Plakat nicht genügend Platz für alle Begriffe vorhanden ist. Die anwesenden 20 SchülerInnen gestalteten in Summe 5 Entwürfe. Zwei dieser Entwürfe sind anschließend angeführt:



[Gruppe Catherina G., Michael K., Michaela M., Oliver R.]



[Gruppe Andreas N., Philipp T., Stefan V., Georg W.]

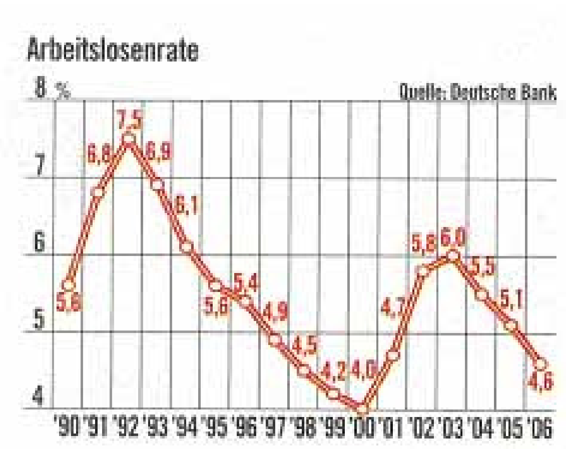
3.2.2 Teilziel 2

Teilziel 2:

Die SchülerInnen sollen die oben angeführten Begriffe (Monotonie, rel. Extrema, Krümmung, Wendepunkte) in vorgegebenen Funktionskurven auffinden und interpretieren können.

3.2.2.1 Beispiele aus der 2. Schularbeit

Bsp.3) Die folgende Grafik stellt die Entwicklung der Arbeitslosenrate zwischen den Jahren 1990 und 2006 dar. [Format vom 23. Feb. 2007, S. 34]

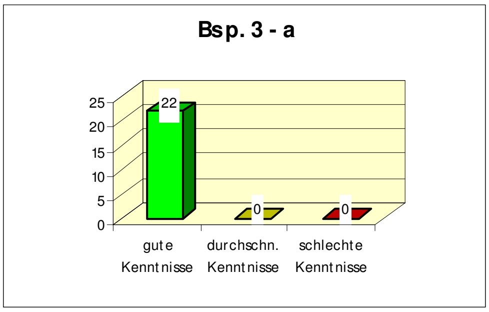


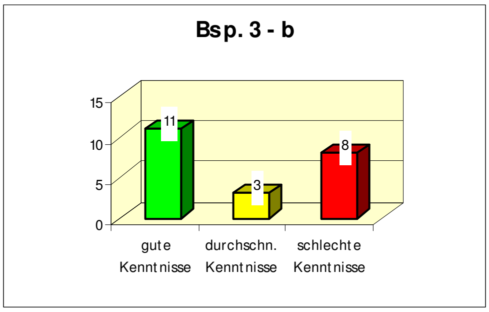
a) Beschreiben Sie unter Verwendung entsprechender Fachbegriffe aus der Differenzialrechnung den Verlauf der Arbeitslosenrate!

b) Können anhand dieser Grafik tatsächlich relative Extremstellen berechnet werden? Begründen Sie kurz!

Beim Teil a konnten maximal 4 Punkte erreicht werden. Dies ergab die Beurteilungsstufen: Gute Kenntnisse bei 4 Punkten, durchschnittliche Kenntnisse bei 2 bis 3 Punkten und schlechte Kenntnisse bei 0 bis 1 Punkt.

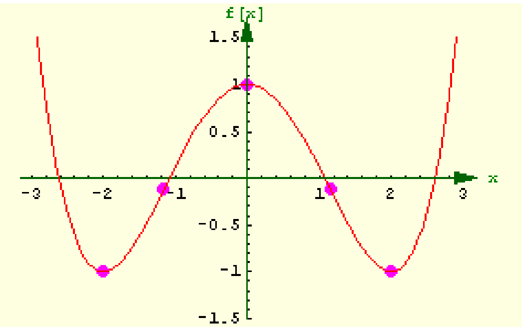
Beim Teil b konnten maximal 2 Punkte erreicht werden: Daraus ergaben sich die Beurteilungsstufen: Gute Kenntnisse bei 2 Punkten, durchschnittliche Kenntnisse bei 1 Punkt und schlechte Kenntnisse bei 0 Punkten.

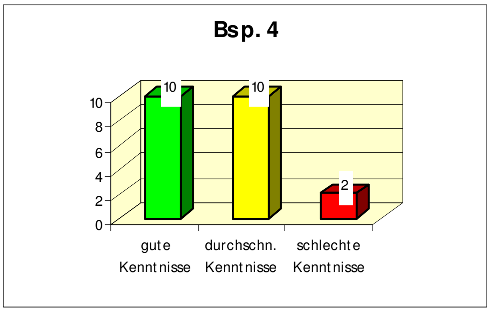




Bsp. 4) Die folgende Grafik stellt den Verlauf einer Polynomfunktion in einem best. Intervall dar. Beschreiben Sie mit einigen Sätzen den Verlauf dieses Graphen von links nach rechts und verwenden Sie dafür die Begriffe der Differenzialrechnung (Monotonie, Krümmung, rel. Extrempunkte, Wendepunkte)!

Bei diesem Beispiel konnten maximal 4 Punkte erreicht werden. Dies ergab die Beurteilungsstufen: Gute Kenntnisse bei 4 Punkten, durchschnittliche Kenntnisse bei 2 bis 3 Punkten und schlechte Kenntnisse bei 0 bis 1 Punkt.





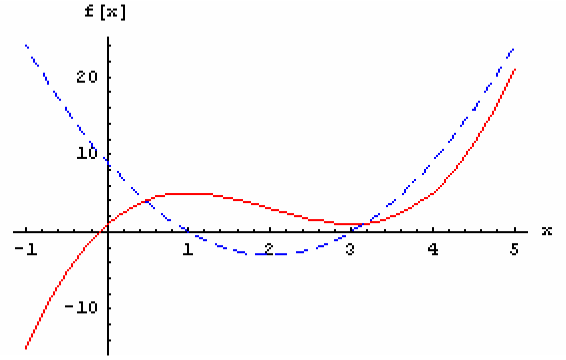
Bsp. 5) Die folgenden Grafiken beinhalten jeweils einen Funktionsgraphen (durchgezeichnet) sowie dessen ersten Ableitungsfunktionsgraphen (strichliert gezeichnet).

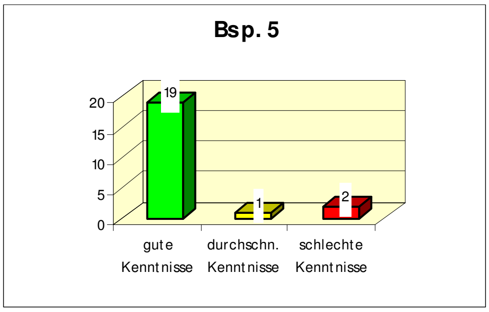
a) In welchen Bereichen ist der Funktionsverlauf streng monoton steigend?

b) In welchen Bereichen ist der Funktionsverlauf streng monoton fallend?

c) An welchen Stellen befinden sich rel. Extrempunkte?

Auch bei diesem Beispiel konnten maximal 4 Punkte erreicht werden. Dies ergab die Beurteilungsstufen: Gute Kenntnisse bei 4 Punkten, durchschnittliche Kenntnisse bei 2 bis 3 Punkten und schlechte Kenntnisse bei 0 bis 1 Punkt.





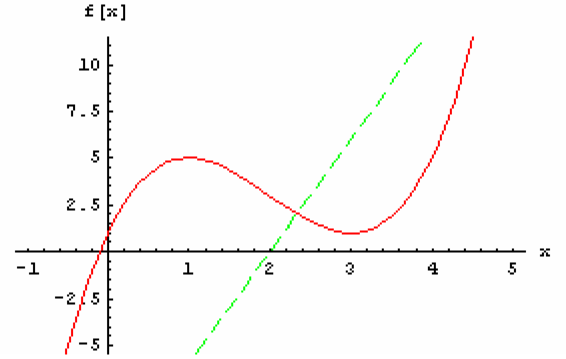
Bsp. 6) Die folgenden Grafiken beinhalten jeweils einen Funktionsgraphen (durchgezeichnet) sowie dessen zweiten Ableitungsfunktionsgraphen (strichliert gezeichnet).

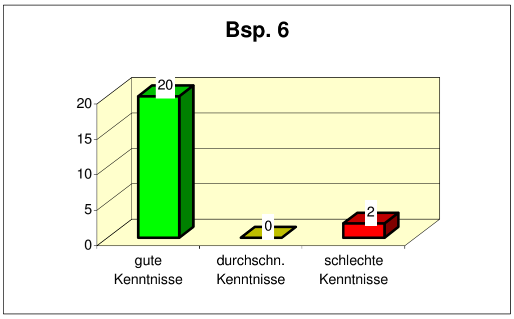
a) In welchen Bereichen ist der Funktionsverlauf positiv gekrümmt?

b) In welchen Bereichen ist der Funktionsverlauf negativ gekrümmt?

c) An welchen Stellen befinden sich Wendepunkte?

Bei diesem Beispiel konnten wieder maximal 4 Punkte erreicht werden. Dies ergab die Beurteilungsstufen: Gute Kenntnisse bei 4 Punkten, durchschnittliche Kenntnisse bei 2 bis 3 Punkten und schlechte Kenntnisse bei 0 bis 1 Punkt.





3.2.3 Teilziel 3

Teilziel 3:

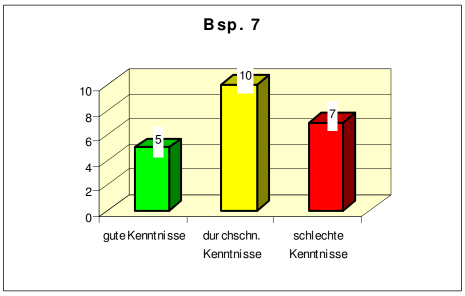
Die SchülerInnen sollen die oben angeführten Begriffe (Monotonie, rel. Extrema, Krümmung, Wendepunkte) aus einfachen Funktionsgleichungen (Polynomfunktionen zweiten und dritten Grades) händisch (d.h. mit Hilfe von einfachen Taschenrechnern) berechnen, identifizieren und interpretieren können.

3.2.3.1 Beispiel 7 aus der 2. Schularbeit

Bsp. 7) Bestimmen Sie die rel. Extrempunkte (EP) (auch HP- und TP – Bestimmung über die 2. Ableitung), die Krümmungseigenschaften (K), sowie den Wendepunkt (WP) der folgenden Funktion:

$$f[x]= \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$$

Bei diesem Beispiel konnten maximal 8 Punkte erreicht werden. Daraus ergaben sich die Beurteilungsstufen: gute Kenntnisse bei 7 bis 8 Punkten, durchschnittliche Kenntnisse bei 4 bis 6 Punkten und schlechte Kenntnise bei 0 bis 3 Punkten.



Ein Beispiel einer Schülerarbeit: [Stefanie F.]

7) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$ EP, K, WP

$f'(x) = \frac{3}{3}x^2 - 6x + 5$

$f''(x) = 2x - 6$

<u>EP</u> $x^2 - 6x + 5 = 0$

$x_{1,2} = -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-6)}{2}\right)^2 - 5}$

$x_{1,2} = 3 \pm 2$

$x_1 = 5$

$x_2 = 1$

$f(5) = \frac{1}{3}\cdot 5^3 - 3\cdot 5^2 + 5\cdot 5$

$f(5) = 41{,}67 - 75 + 25$

$f(5) = -8{,}33$

$E_1 = (5|-8{,}33) = TP$

$f(1) = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 + 5\cdot 1$

$f(1) = 0{,}33 - 3 + 5$

$f(1) = 2{,}33$

$E_2 = (1|2{,}33) = HP$

$f''(5) = 2\cdot 5 - 6$

$f''(5) = 4 \rightarrow$ pos $\rightarrow$ TP

$f''(1) = 2\cdot 1 - 6$

$f''(1) = -4 \rightarrow$ neg $\rightarrow$ HP

<u>pos. Krümmung</u>

$2x - 6 > 0 \quad |+6$

$2x > 6 \quad |:2$

$x > 3$

neg. Krümmung

$2x - 6 < 0 \quad |+6$

$2x < 6 \quad |:2$

$x < 3$

Bei allen x-Werten, die größer 3 sind, ist die Funktion positiv gekrümmt.
Bei allen x-Werten, die kleiner 3 sind, ist die Funktion negativ gekrümmt.

Wendepunkt

$2x - 6 = 0 \quad |+6$

$2x = 6 \quad |:2$

$x = 3$

$f(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 3\cdot 3^2 + 5\cdot 3$

$f(3) = 9 - 27 + 15$

$f(3) = -3$

WP $(3|-3)$

Der Wendepunkt liegt bei $x = 3$ und $f(3) = -3$

3.2.4 Teilziel 4

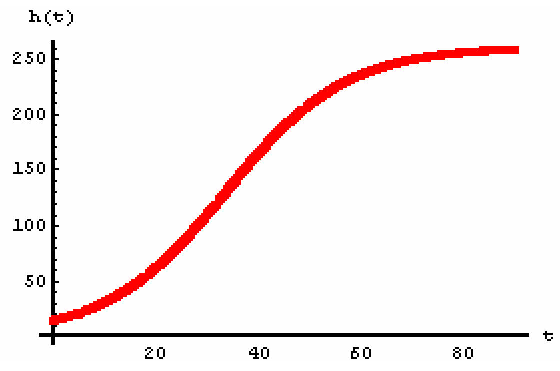
Teilziel 4:

Die SchülerInnen sollen als Kleingruppe (Partnerarbeit) eine Anwendungsfunktion aus den Bereichen Physik, Biologie, Medizin, Technik bzw. Wirtschaft mit Hilfe eines CAS (Mathematica) in Hinblick auf den Verlaufsaspekt (Monotonie, rel. Extrema, Krümmung, Wendepunkte) untersuchen, interpretieren, reflektieren und darüber kommunizieren können.

3.2.4.1 Einige Auszüge aus den einzelnen Partnerarbeiten

Projekt – Wachstum von Sonnenblumen:

Frage 1)
Wie kann man bestimmen, zu welchem Zeitpunkt die Sonnenblume ihr Wachtumsverhalten ändert (rechnerisch und grafisch)?
Beschreiben Sie dies mit einigen Sätzen!

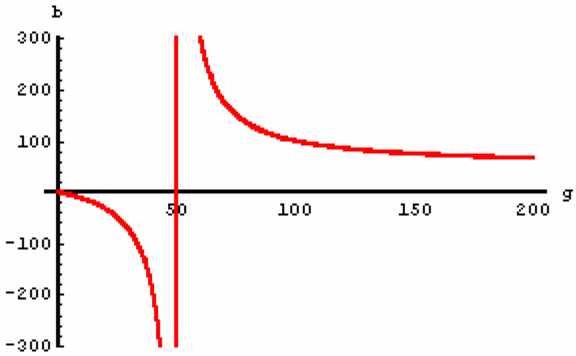


„Mit der 2. Ableitung kann man berechnen, wann sich das Wachstumsverhalten ändert. Man kann damit den progressiven und den degressiven Verlauf berechnen, sowie den Wendepunkt. Der Wendepunkt ist jener Punkt an dem sich das Wachstumsverhalten ändert. Ab diesem Punkt geht das Wachstum der Blumen deutlich zurück, bis es bei einer Höhe von 260 cm ganz zum Stillstand kommt. Der Wendepunkt der Funktion liegt bei cirka 34 Tagen und bei ungefähr einer Höhe von 130 cm.“

[Jasmin H. und Sonja K.]

Projekt - Zusammenspiel von Gegenstandsweite, Brennweite und Bildweite:

Frage 3) Was passiert, wenn die Gegenstandsweite g = 50 mm beträgt?



„Wenn die Gegenstandsweite 50 mm beträgt, dann entsteht kein Bild. Das heißt, ist die Gegenstandsweite gleich die Brennweite, entsteht kein Bild.“

[Melanie D., Tina T.]

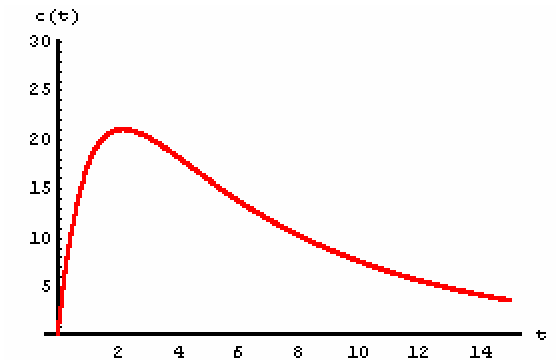
Projekt - Veränderung der Konzentration eines Medikamentes:

Frage 3:

In welchem Bereich ist die Funktion monoton wachsend bzw. monoton fallend?

(Lösen Sie dies mit dem Programm Mathematica rechnerisch und grafisch!)

Was bedeuten diese beiden Begriffe auf die Konzentration des Medikamentes bezogen?



„Die Funktion ist monoton steigend für alle t die größer als 0 und kleiner als 2,1122 sind. Die Funktion ist monoton fallend für alle t die kleiner als 2,122 sind.
Von 0 bis 2,122 steigt die Konzentration des Medikamentes bis sie ihren Maximal-wert von 2,122 erreicht und dann fällt sie wieder.“

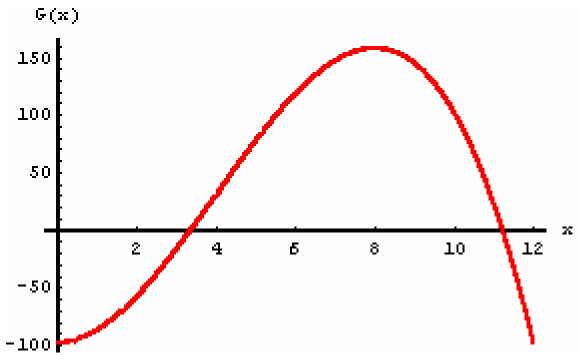
(Viktoria H., Tanja K.)

Projekt - Gewinn und Verlust:

Frage 1:

Wie kann man bestimmen, für welche Verkaufsmenge der Gewinn ein Maximum erreicht (rechnerisch und grafisch)?

Beschreiben Sie dies mit einigen Sätzen!



„Um den Maximalgewinn auszurechnen, benötigt man die erste Ableitungsfunktion. Mithilfe der ersten Ableitungsfunktion kann man den relativen Hochpunkt bzw. Tiefpunkt berechnen. In diesem Fall ist der relative Hochpunkt von Relevanz, da er hier den Maximalgewinn darstellt!

Grafisch gesehen ist das Gewinnmaximum der Punkt, an dem die Kurve, im positiven Bereich der Funktion, den weitesten Abstand zur x – Achse hat.“

[Günther L., Udo S., Stefan V.]

4 REFLEXIONEN

4.1 Reflexionen zum Teilziel 1

Von den abgegebenen 21 Zeitungsartikeln konnten 5 Artikel als sehr gute bzw. gute Leistungen bezeichnet werden. 10 dieser Arbeiten konnten als durchschnittliche Leistungen eingestuft werden und lediglich 6 Arbeiten haben nicht entsprochen. Somit haben mehr als zwei Drittel der abgegebenen Arbeiten das Anforderungsprofil erreicht. Natürlich befinden sich auch bei den guten Arbeiten an manchen Stellen gewisse Unzulänglichkeiten (Siehe etwa die Begriffsbildung über rel. Extremstellen beim ersten Artikel), was aber in Anbetracht der großen Fülle an Begriffen und dem damaligen recht frühen Wissensstand der SchülerInnen (die Begriffe über den Verlaufsaspekt wurden teilweise erst eine UE zuvor eingeführt) verständlich ist. Mit der Vergabe eines derartigen Arbeitsauftrages wurden die SchülerInnen angehalten, sich über die einzelnen Begriffe eigene Gedanken (= Reflexionen) zu machen. Außerdem wurde die Kommunikationsfähigkeit der SchülerInnen auf diesem Gebiet gestärkt.

Alle „Theoriefragen“ in der 2. Schularbeit wurden von der Mehrheit der SchülerInnen richtig bzw. zumindest teilweise richtig beantwortet. Am aufwändigsten für die SchülerInnen und somit tendenziell am meisten fehlerbehaftet erwiesen sich die Fragen nach den Eigenschaften des rel. Tiefpunktes und nach der ersten Ableitungsfunktion.

Einen weiteren Reflexionsprozess stellte die Gestaltung einer Plakatvorlage zum Verlaufsaspekt dar. Dabei mussten sich die SchülerInnen wieder Gedanken über die Inhalte der einzelnen Begriffe machen, nun diese Begriffe aber auch bewerten und aushandeln, welche davon und in welcher Tiefe am Plakatentwurf aufscheinen sollten.

Somit kann behauptet werden, dass die überwiegende Anzahl der SchülerInnen dieser Klasse dieses Teilziel 1 erreicht haben, und somit über die grundlegenden Vorstellungen über die Begriffe des Verlaufsaspektes Bescheid wissen und diese auch kommunizieren können.

4.2 Reflexionen zum Teilziel 2

Aufgrund der Evaluierungsergebnisse der Beispiele 3 bis 6 aus der 2. Schularbeit ist ersichtlich, dass beinahe alle SchülerInnen (bis auf jeweils 2) mit den verschiedenen Aufgabenstellungen umgehen konnten. Somit verfügen sie über die Fähigkeiten, Verlaufsaspekte in vorgegebenen Funktionskurven erkennen, beschreiben und interpretieren zu können. Lediglich mit der ziemlich in die Tiefe gehenden Reflexionsaufgabe (Bsp. 3b) konnten 8 SchülerInnen nichts anfangen und lieferten falsche Antworten. Aber immerhin 11 SchülerInnen konnten auch hier eine richtige Antwort geben.

Somit kann gefolgert werden, dass beinahe alle SchülerInnen der Klasse dieses Teilziel 2 erreicht haben.

4.3 Reflexionen zum Teilziel 3

Aufgrund der Evaluierungsergebnisse des Beispiels 7 aus der 2. Schularbeit ist ersichtlich, dass 5 SchülerInnen mit dieser Art von Aufgabenstellungen sehr gut bis gut umgehen konnten. 10 SchülerInnen konnten durchschnittlich damit umgehen und 7 schlecht bis gar nicht.

Die Fehler die auftraten, waren sehr weit gestreut: Probleme mit der Ableitung der Polynomfunktion (wobei der Vorfaktor „1/3“ offensichtlich Einiges zur Verwirrung beitrug), Probleme mit der Algebra, Probleme beim Lösen der quadratischen Gleichung, usw.

Somit verfügen etwa zwei Drittel der SchülerInnen der Klasse über die Fähigkeiten, die für den Verlaufsaspekt relevanten Begriffe aus einer Polynomfunktion berechnen und interpretieren zu können.

4.4 Reflexionen zum Teilziel 4

In diesem Abschnitt wurden die SchülerInnen mit dem schwierigsten Abschnitt dieses Projektes konfrontiert. Jede Zweiergruppe erhielt ein Beispiel aus einem Anwendungsbereich der Differenzialrechnung. Die 5 verschiedenen Themenstellungen unterschieden sich sowohl im Anwendungskontext als auch in der mathematischen Funktionsgleichung. Von den Anwendungskontexten wurden die Gebiete Medizin, Biologie, Physik, Technik und Wirtschaft berührt. Vom mathematischen Inhalt reichte der Bogen von Polynomfunktionen zweiten und dritten Grades, über eine gebrochen – rationale Funktionsgleichung bis hin zu verschiedenen Exponentialgleichungen. Im Teil A ging es bei all diesen Partnerarbeiten um das Berechnen (mit dem CAS Mathematica), Interpretieren und Kommunizieren von Verlaufseigenschaften der jeweiligen Funktionsgleichung. Wobei - je nach Funktionsgleichung - manchmal nur Monotonie und rel. Extrempunkte und manchmal nur Krümmung und Wendepunkte im Zentrum der Betrachtungen standen. Von den 10 Zweiergruppen und einer Dreiergruppe konnten 5 Gruppen gut mit den vorgegebenen Problemstellungen umgehen, 4 Gruppen durchschnittlich und 2 Gruppen überhaupt nicht.

Somit wurde dieses Teilziel 4 (Berechnen, Interpretieren, Reflektieren und Kommunizieren von Verlaufseigenschaften) von weit mehr als zwei Drittel der SchülerInnen dieser Klasse erreicht.

Im Teil B war vorgesehen, die Erkenntnisse über den Verlaufsaspekt auf Parameterfunktionen auszudehnen. An diesem Teil scheiterten leider alle Gruppen. Offensichtlich war die dafür investierte Unterrichtszeit zu kurz und die Thematik dafür zu schwer. Bei einem ähnlichen zukünftigen Projekt müsste deswegen weitaus mehr Zeit in die Vorbereitung der Parameterfunktionen investiert werden.

5 AUSBLICKE

Dieses Unterrichtsdesign mit seinen wesentlichen Elementen (wie Auslagerung von umfangreichen Berechnungen an CAS, Animationen mit Mathematica - Movies, Stationsbetrieb in Gruppenform, Schreiben von Aufsätzen / Zeitungsartikeln, Vortrag und Aushandlung im Plenum) erscheint geeignet, auch in anderen Teilgebieten der Differenzialrechnung, der Mathematik oder überhaupt in anderen technischen Gegenständen verwendet zu werden.

6 LITERATUR

ALTRICHTER,H. & POSCH, P. (1998). *Lehrer erforschen ihren Unterricht*.

Eine Einführung in die Methoden der Akrtionsforschung. Dritte erw. Aufl. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Barzel, Bärbel u.a.(2005): *Computer, Internet & Co. im Mathematik-Unterricht*, Cornelsen

Behrends, Erhard (2006): *Fünf Minuten Mathematik*, Vieweg

Blum, Werner u.a. (2006): *Bildungsstandards Mathematik: konkret*, Cornelsen

Büchter, Andreas (2005): *Mathematikaufgaben selbst entwickeln*, Cornelsen

Danckwerts, Rainer, Dankwart, Vogel (2006): *Analysis verständlich unterrichten*, Spektrum

Fischer, Roland (o. J. a): *Höhere Allgemeinbildung.* Typoskript, Universität Klagenfurt/IFF Wien, 15 S.

Fischer, Roland (o. J. b): *Höhere Allgemeinbildung II.* Typoskript, Universität Klagenfurt/IFF Wien, 46 S.

Fischer, Roland, Malle, Günther (2004): *Mensch und Mathematik*, Profil

Hußmann, Stephan (2003): *Mathematik entdecken und erforschen*, Cornelsen

Kiehl, Martin (2006): *Mathematisches Modellieren für die Sekundarstufe II*, Cornelsen

Küstenmacher, Werner (2003): *Mathe macchiato*, Pearson – Studium

Jahnke, Thomas (2002): *Mathematik – Analysis*, Cornelsen

Munowitz, Michael (2006): *Physik ohne Formeln*, Rowohlt

Pesch, Hans (2002): *Schlüsseltechnologie Mathematik*, Teubner

Timischl, Werner (1998): *Biomathematik*, Springer

Timischl, Wolfgang, Prugger, Eva (2005):*Mathematik u. Wirtschaft 3*, E. Dorner

Walz Guido u.a. (2005): *Brückenkurs Mathematik*, Spektrum

Sonstige Quellen:

IFF (Hrsg.) (2001). Endbericht zum Projekt IMST² – Innovations in Mathematics, Science and Technology Teaching. Pilotjahr 2000/01. Klagenfurt : Im Auftrag des BMBWK. IFF.

ANHANG

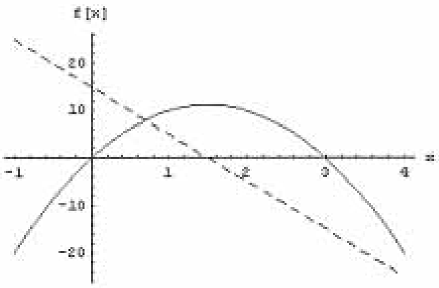
Station 2 – Monotonie und relative Extrempunkte

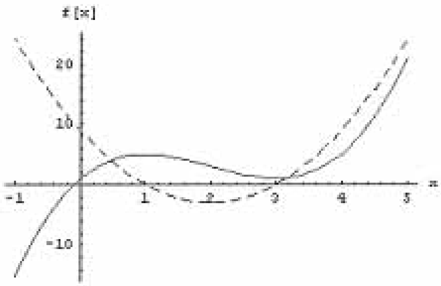
1) Die folgenden beiden Grafiken beinhalten jeweils einen Funktionsgraphen (durchgezeichnet) sowie dessen ersten Ableitungsfunktionsgraphen (strichliert gezeichnet).

a) In welchen Bereichen ist der Funktionsverlauf streng monoton steigend?
b) In welchen Bereichen ist der Funktionsverlauf streng monoton fallend?
c) An welchen Stellen befinden sich rel. Extrempunkte (rel. Hochpunkt, rel. Tiefpunkt)?

Vergleichen Sie dazu den Funktionsgraphen mit dem Graphen der ersten Ableitungsfunktion!
Was stellen Sie dabei fest? Vergleichen Sie die Lösungen von α mit der ersten Ableitungsfunktion!

α) $f(x) = -5x^2 + 15x$ mit $f'(x) = -10x + 15$
β) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ mit $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$





Anleitung für α:
Streng monoton steigend für $x < 1.5$
rel. Hochpunkt bei $x = 1.5$
streng monoton fallend für ....

Lösung von β:
streng monoton steigend für ....
streng monoton fallend für ....
rel. Hochpunkt bei ....
rel. Tiefpunkt bei ....

Welchen Zusammenhang erkennen Sie zwischen der ersten Ableitung und der Monotonie?

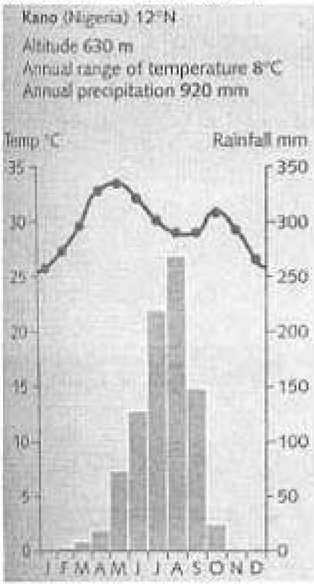
....

....

Welchen Zusammenhang erkennen Sie zwischen der ersten Ableitung und den rel. Extrempunkten?

....

....



2) [Grafik aus David Waugh: „The New Wider World", Nelson, 1994, S. 199, S. 197]

Die nebenstehende Grafik stellt einige Klimadaten von Kano in Nigeria dar.

a) Beschreiben Sie den Temperaturverlauf und die vorhandenen besonderen Punkte mit einigen Sätzen! Benützen Sie dafür die Begriffe Monotonie und rel. Extrempunkt! ....

....

b) Welche Zeit erscheint für einen Europäer als Reisezeit in dieses Land am besten geeignet zu sein? Begründen Sie Ihre Entscheidung! ....

....

c) Durch welche Polynomfunktion (Welcher Grad?) könnte der nebenstehende Funktionsverlauf ungefähr dargestellt werden?

....

3) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ mit der ersten Ableitungsfunktion $f'(x) = 4x + 4$.

In welchen Bereichen ist die Funktion streng monoton steigend bzw. fallend?

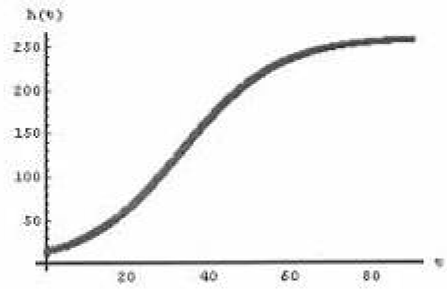
An welcher Stelle befindet sich der rel. Extrempunkt?

Das Wachstum von Sonnenblumen

Das Wachstum von Sonnenblumen kann durch die Funktion h mit

$$h(t) = \frac{260}{1+17.854 * e^{-\lambda * t}}$$

beschrieben werden (h ...Höhe in cm; t...Zeit in Tage; Maximalhöhe = 260 cm; λ...Wachstumsfaktor).



a) Wachstumsfaktor λ = 0.08546

Fragen:

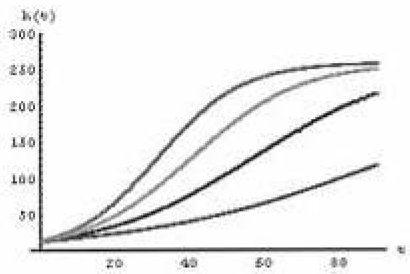
1) Wie kann man bestimmen, zu welchem Zeitpunkt die Sonnenblume ihr Wachstumsverhalten ändert (rechnerisch und grafisch)?
Beschreiben Sie dies mit einigen Sätzen!

2) Berechnen Sie (mit dem Programm Mathematica), zu welchem Zeitpunkt die Sonnenblume ihr Wachstumsverhalten ändert! Berechnen Sie auch die Höhe der Sonnenblume zu diesem Zeitpunkt!

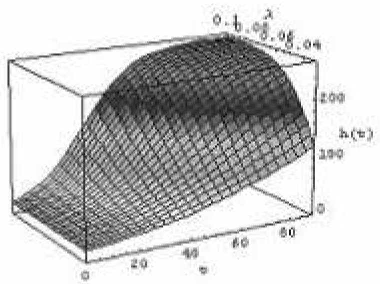
3) In welchem Bereich ist die Funktion progressiv - bzw. degressiv verlaufend?
(Lösen Sie dies mit dem Programm Mathematica rechnerisch und grafisch!)
Was bedeuten diese beiden Begriffe auf das Wachstum der Sonnenblume bezogen?

b) Der Wachstumsfaktor λ als Parameter:

λ = 0.03, 0.05, 0.07 bzw. 0.09



Die 3D - Parameterfunktion:



Fragen:

1) Wie kann man bestimmen, zu welchem Zeitpunkt die Sonnenblumen ihr Wachstumsverhalten ändern? Ist dies nun auch grafisch möglich?
Erklären Sie dies mit einigen Sätzen!

2) Berechnen Sie (mit dem Programm Mathematica) zu welchem Zeitpunkt die Sonnenblumen ihr Wachstumsverhalten ändern! Berechnen Sie auch die Höhen der Sonnenblumen zu diesem Zeitpunkt!
Beschreiben Sie dies mit einfachen Sätzen!

3) In welchem Bereich ist die Funktion progressiv - bzw. degressiv verlaufend?
(Lösen Sie dies mit dem Programm Mathematica!)
Beschreiben Sie dies mit einfachen Sätzen!

4) Was hat sich nun gegenüber dem Teil a geändert? Schreiben Sie einige Sätze dazu!

