

Reihe „Pädagogik und Fachdidaktik für LehrerInnen“

Herausgegeben von der
Abteilung „Schule und gesellschaftliches Lernen“

des Instituts für Interdisziplinäre Forschung und Fortbildung
der Universität Klagenfurt

Barbara Riehs

Unterrichten mit Cabri Computerunterstützte Behandlung eines Kapitels der elementaren Geometrie

PFL-Mathematik

IFF, Klagenfurt, 2002

Betreuung:
Edith Schneider

Die Universitätslehrgänge „Pädagogik und Fachdidaktik für LehrerInnen“ (PFL) sind interdisziplinäre Lehrerfortbildungsprogramme der Abteilung „Schule und gesellschaftliches Lernen“ des IFF. Die Durchführung der Lehrgänge erfolgt mit Unterstützung des BMBWK.

Inhaltsverzeichnis

1 Geometrie einmal anders unterrichten	1
1.1 Ausgangssituation	1
1.2 Forschungsfrage	2
2 Aufbau der Unterrichtssequenz	3
2.1 Symmetrie in Natur und Kunst	3
2.2 Achsenspiegelung	4
2.2.1 Gespiegelte Bewegung	4
2.2.2 Spiegeln nach Augenmaß	4
2.2.3 Untersuchungen an gespiegelten Figuren	5
2.2.4 besondere Eigenschaften symmetrischer Figuren	5
2.2.5 Symmetralen mit Cabri zeichnen	5
2.3 Konstruktion der Strecken- und Winkelsymmetrale	6
2.3.1 Streckensymmetrale	6
2.3.2 Winkelsymmetrale	7
3 Ergebnisse des Unterrichts	8
3.1 erste Arbeiten mit dem Computer	8
3.2 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	12
3.3 Strecken- und Winkelsymmetrale mit dem PC	13
3.4 Schularbeitsergebnisse	14
3.5 Arbeitsblätter aus der Sicht der Schüler	18
4 Resümee	21
4.1 Welche Möglichkeiten der DGS unterstützen mich bei meiner Arbeit?	21
4.1.1 Der Zugmodus im Einsatz	21
4.1.2 Messen und Konstruieren mit Cabri	22
4.1.3 Unterrichten mit Cabri	22
4.2 die Arbeit der Schüler und ihre Leistungen	23
4.2.1 Zu welchen Leistungen und Ergebnissen gelangen meine Schüler?	23
4.2.2 Welche Schwierigkeiten traten auf?	23

Anhang

A1	Beispiele symmetrischer Figuren	25
A2	Achsensymmetrie (Auszug aus dem Arbeitsblatt)	25
A3	Spiegeln mit Spur	26
A4	Spiegeln nach Augenmaß	26
A5	Lage der Punkte	27
A6	Eine symmetrisch liegende Figur	27
A7	Eine symmetrisch liegende Figur (Arbeitsblatt)	28
A8	Wo liegt die Spiegelachse	29
A9	Gespigelter Kreis	29
A11	Strecken- und Winkelsymmetrale	31
A12	Streckensymmetrale	32
A13	Winkelsymmetrale	32
A14	Winkelsymmetrale – Wie geht das?	32
A15	Beispiele zur Hausübung	33
A16	Fragebogen zum Arbeiten mit dem PC	34

Unterrichten mit Cabri computerunterstützte Behandlung eines Kapitels der elementaren Geometrie

(Abstract / Kurzfassung)

Mein Vorhaben, Geometrie anders als bisher zu unterrichten, hat mich dazu bewogen, einen lang gehegten Wunsch in die Tat umzusetzen und den Computer im Mathematikunterricht einzusetzen. Ich wollte verhindern, dass meine Schüler¹ Konstruktionsschritte, die ich an der Tafel vorzeigen würde, einfach nachmachen. Stattdessen sollten sie vorgegebene Konstruktionen (achsensymmetrischer Bilder) untersuchen und zu bestimmten Einsichten gelangen.

In dieser Studie möchte ich zeigen, welche Möglichkeiten der dynamischen Geometriesoftware ich genutzt habe, um mein Konzept „vom Phänomen zur Konstruktion“ zu verwirklichen, wie meine Schüler in einzelnen Stunden gearbeitet haben, zu welchen Ergebnissen sie gekommen sind und welche Probleme im Zusammenhang mit den Aufgabenstellungen aufgetreten sind.

Um einen Einblick in die Schülerleistungen geben zu können, habe ich Aufzeichnungen über die Arbeiten der Schüler während der Stunde und einige Schularbeitsergebnisse zusammengestellt. Da Cabri die Möglichkeit bietet, Konstruktionsschritte einzeln wiederholen zu lassen, konnte ich manche interessante Lösungswege meiner Schüler nachvollziehen und in meine Ausführungen einarbeiten.

Von den Möglichkeiten, die eine dynamische Geometriesoftware bietet, habe ich den Zugmodus am häufigsten eingesetzt. Die Schüler veränderten meist konstruierte Figuren und beobachteten dabei, welche Beziehungen trotz der Veränderungen erhalten blieben. So lernten sie die Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren kennen, um damit zu „begründen“, wie eine Symmetrale zu konstruieren ist.

Da ich in diesen Stunden nicht als Informationsquelle fungierte, konnte ich anders als im normalen Unterricht meine Schüler bei der Arbeit beobachten und in Gesprächen mehr auf ihre Fragen und Missverständnisse eingehen. Mir wurde wieder bewusst, welche positive Bedeutung Fehler in einem Lernprozess haben können. Sie scheinen wichtiger zu sein als manche richtige Antwort.

Gründe für einige Schwierigkeiten, die bei der Behandlung des Stoffgebietes aufgetreten sind, sind auch in der Konzeption einzelner Arbeitsblätter zu finden und sollten Inhalt weiterer Reflexion sein.

Mag. Barbara Riehs

BG18

Klostergasse 25, 1180 Wien

barbara.riehs@chello.at

¹ In den weiteren Ausführungen sind unter dem Begriff Schüler Personen beiderlei Geschlechts gemeint.

1 Geometrie einmal anders unterrichten

1.1 Ausgangssituation

Einsatz neuer Medien im Unterricht – schon seit einigen Jahren werde ich mit diesem Schlagwort konfrontiert. So habe ich nicht nur in den Schulbüchern der Oberstufe Computeraufgaben für den Mathematikunterricht gefunden, auch die Bücher für die Unterstufe enthalten einige Anregungen und Beispiele, wie verschiedene Programme im Unterricht eingesetzt werden können. Zur Vorbereitung verwende ich seit langem Mathematikprogramme oder suche im Internet nach Material für den Mathematikunterricht. Den Schritt, bei einer längeren Unterrichtssequenz den Computer einzusetzen, hatte ich bisher noch nicht gewagt.

In diesem Schuljahr unterrichte ich eine 2. Klasse AHS, für die im Lehrplan ein großes Kapitel zur Geometrie vorgesehen. Die Schüler sollen u. a. Dreiecke, Vierecke und regelmäßige Vielecke untersuchen und wesentliche Eigenschaften feststellen. Sie sollen die Eigenschaften von Strecken- und Winkelsymmetralen kennen und für Konstruktionen anwenden können.

Folge ich der Formulierung des Lehrplanes, so geht es in erster Linie nicht darum, den „Gang der Konstruktion“ zu lehren, sondern die Bedeutung und Eigenschaften der Symmetralen den Schülern nahe zu bringen. So habe ich beschlossen, als Erweiterungskapitel und als Vertiefung der Kenntnisse aus dem Vorjahr, einige Inhalte zur Symmetrie zu unterrichten und dabei den Computer zu verwenden.

Nicht nur der Wunsch nach einem neuen Medium, sondern auch die Unzufriedenheit mit meinem bisherigen Geometrieunterricht hat mich zu diesem Schritt bewogen. Einerseits hat sich das Problem der Zeichengenauigkeit immer in den Vordergrund gedrängt – wie viel Zeit und Konzentration ist z. B. aufzuwenden, bis die drei Winkelsymmetralen des Dreiecks sich in einem Punkt schneiden – andererseits hatte ich Mühe, den Kindern zu erklären, warum man die Winkelsymmetrale so zeichnen müsse, wie ich es eben vorgezeigt hatte, war doch die Aufmerksamkeit der Schüler auf das Hantieren mit Zirkel und Lineal gelenkt. Dass alle Punkte der Symmetrale von den Schenkeln des Winkels den gleichen Abstand haben, diese Eigenschaft dieser Geraden war eher ein schmückendes Beiwerk als wesentlicher Inhalt des Lernstoffs.

Ist nun das exakte Zeichnen mit gespitztem harten Bleistift vorrangiges Ziel des Geometrieunterrichtes? Eigentlich will ich etwas anderes erreichen. Gerade der Geometrieunterricht der Unterstufe mit seinen konkreten und anschaulichen Inhalten scheint mir sehr geeignet zu sein, den Schülern etwas von der Art und Weise mathematischen Denkens näher zu bringen.

Darüber hinaus erlaubt es das Kapitel der Spiegelung und Symmetrie, Mathematik in unserer Umgebung aufzuspüren. Vieles, was uns in der Natur umgibt, was uns in unserer Kultur begegnet, zeichnet sich durch eine besondere Gestalt aus, die wir symmetrisch nennen. Worin liegt aber die Faszination dieser Symmetrie? Wie können symmetrische Bilder hergestellt werden und wie finde ich diese Achse genau in der Mitte, durch die eine solche Figur in zwei kongruente Teile zerlegt wird?

Lag also in meinem bisherigen Unterricht das Hauptaugenmerk auf der Erklärung und Beschreibung der unterschiedlichen Konstruktions- und Lösungswege, so will ich die Schüler jetzt dazu führen, an Hand von Darstellungen symmetrischer Figuren Eigenschaften kennen zu lernen, die für eine Konstruktion sowohl eines Spiegelbildes als auch für die Konstruktion der Symmetralen mit Zirkel und Lineal wesentlich sind. Dabei führe ich sie mit den Arbeitsblättern

Schritt für Schritt zu den wesentlichen Erkenntnissen. Sie können wenig selbstständig entdecken, aber sie sind aufgefordert, sehr viel selbst zu tun, zu zeichnen, zu probieren, zu verändern und zu beobachten. Wichtig ist mir, dass sie mich beim Zeichnen nicht nachahmen, sondern dass sie durch den Umgang mit den Figuren angemessene Vorstellungen von Symmetrie entwickeln, bevor sie mit Zirkel und Lineal konstruieren. Statt vorzuexerzieren, „wie man's macht“, möchte ich den Schülern eher zeigen, was fragwürdig und staunenswert ist, „warum man's macht“. Ich möchte sie durch meine Aufgabenstellung anleiten, zu einer begründeten Lösung zu gelangen, d. h. zu einer Lösung, von deren Richtigkeit sie überzeugt sind und andere überzeugen könnten.

Wie kann aber die Geometriesoftware mich bei meinem Anliegen unterstützen? Ich arbeite sehr gerne am Computer und bin immer wieder sehr fasziniert von den Applets, die im Internet zu geometrischen Fragestellungen zu finden sind. Hier hat es mir besonders der Zugmodus angefallen, der ein Charakteristikum aller dynamischen Geometriesoftwareprodukte (DGS) ist. Die Möglichkeit, eine Figur durch einfaches Ziehen mit der Maus zu verändern, öffnet ein weites Feld des Probierens, Vermutens, auch des spielerischen Umgangs mit bestimmten Phänomenen. Vor allem kann man beobachten, wie eine Figur aus einer anderen durch einfache Veränderung hervorgeht. Beim Arbeiten mit Zirkel und Lineal muss ich ja die veränderte Figur wieder separat zeichnen und einen Zusammenhang mit der Ausgangsfigur rein gedanklich herstellen. Am PC kann ich die Veränderung beobachten und mitverfolgen.

Ein weiterer Vorteil der DGS sehe ich in den verschiedenen Tools, die ich einsetzen kann, um mein Anliegen durchzuführen. Es erzeugt z. B. der Befehl „Geradenspiegelung“ das Spiegelbild eines Punktes P, sodass die Schüler bei ihrer Arbeit vom Ergebnis einer Spiegelung ausgehen konnten, um daran wesentliche Eigenschaften dieser Abbildung zu studieren. Ein anderes Charakteristikum der DGS, der sog. Spurmodus, hat im Zusammenhang mit dem Zugmodus mir ebenfalls neue Möglichkeiten bei der Behandlung der Spiegelung eröffnet.

1.2 Forschungsfrage

In dieser Studie möchte ich nun untersuchen, ob das Arbeiten mit Cabri mich unterstützt, den Schülern einen Zugang zu geometrischen Inhalten zu vermitteln und das Verständnis für Zusammenhänge zu wecken und ob ich mein Konzept so verwirklichen kann.

Welche Möglichkeiten einer DGS unterstützen mich bei der Behandlung der Achsensymmetrie? Wie kann ich das Programm einsetzen, um bei den Schülern die Konstruktion mit Zirkel und Lineal vorzubereiten? Welches Lernverhalten bzw. Lernfortschritt kann ich bei meinen Schülern beobachten, zu welchen Leistungen und Ergebnissen gelangen sie? Welche Schwierigkeiten treten im Laufe der Arbeit auf?

Im nächsten Kapitel werde ich zunächst einen kurzen Überblick über die geplanten Unterrichtsschritte geben, um dann im dritten Teil meiner Arbeit auf die konkreten Ergebnisse des Unterrichts einzugehen.

2 Aufbau der Unterrichtssequenz

In dieser Unterrichtssequenz habe ich also versucht, Möglichkeiten, die Cabri² bietet, zu nutzen, um auf andere Art und Weise das Thema „Symmetrie“ zu behandeln. In diesem Abschnitt möchte ich nun die einzelnen Schritte der Teile der Unterrichtssequenz kurz darstellen, in denen zum Thema Achsenspiegelung gearbeitet wurde. Ich möchte auch zeigen, welche Möglichkeiten der DGS ich in den einzelnen Schritten genützt habe.

Die Ziele, die ich durch diese acht Unterrichtsstunden, die dieser Studie zugrunde liegen, erreichen wollte, lassen sich folgendermaßen beschreiben:

Die Schüler sollen Besonderheiten symmetrischer Bilder untersuchen und aus den gewonnenen Erkenntnissen Schlüsse für die Konstruktion der Spiegelung einer Figur an einer Achse ziehen.

Die Schüler sollen fähig sein, Winkel- und Streckensymmetrale mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Sie sollen die Eigenschaften dieser besonderen Geraden angeben können und zur Lösung von praktischen Problemen einsetzen.

Um die Schüler zu diesen Zielen zu führen, habe ich Dateien und Arbeitsblätter mit verschiedenen Aufgabenstellungen und Hinweisen vorbereitet, die von den Schülern in Partnerarbeit zu erledigen waren. Arbeitsblätter und der Ausdruck der vorbereiteten Dateien sind im Anhang angefügt. Auf einige Arbeitsblätter werde ich im nächsten Kapitel genauer eingehen.

Als Vorlagen für meine Unterrichtsvorbereitung habe ich einerseits verschiedene Schulbücher³ herangezogen, andererseits einige Praxisbeispiele zum Geometrieunterricht aus dem Internet verwendet⁴. So habe ich versucht, mit Hilfe dieser unterschiedlichen Anregungen eine Unterrichtssequenz aufzubauen.

2.1 Symmetrie in Natur und Kunst

Als Einstieg wählte ich verschiedene Bilder: das Taj Mahal, eine Blüte, ein Mandala, ein Autobahnkreuz, eine Katze, ...⁵ Die Schüler sollten nun versuchen, Gemeinsamkeiten dieser unterschiedlichen Motive zu erkennen und zu nennen. In einem gemeinsamen Gespräch versuchten wir eine vorläufige erste Erklärung von „Symmetrie“ zu geben.

Ausgangspunkt unserer Überlegungen waren also mehrere Darstellungen symmetrischer Objekte. Auch bei den weiteren Untersuchungen habe ich den Schülern immer wieder Bilder vorgelegt, an denen sie Besonderheiten erkennen und benennen sollten, um daraus dann Schritte für eine Konstruktion einer Achsenspiegelung abzuleiten.

Symmetrische Bilder kannten die Kindern. Einige erste Versuche, solche Bilder zu zeichnen, haben wir schon in der ersten Klasse durchgeführt. Damals haben die Schüler aus gefaltetem Papier verschiedene Formen ausgeschnitten oder Bilder gezeichnet, indem sie in jeder Hand einen Stift hielten und mit gegengleichen Bewegungen annähernd symmetrische Bilder erzeugten. In weiteren Aufgaben ging es darum, Bilder, die auf kariertem Papier gezeichnet

² das Programm ist auf allen Geräten im Informatiksaal installiert

³ Mathematik Neue Wege 2, Arbeitsbuch für Gymnasien, Schroedel, 2001,
Querschnitte Mathematik 2, Westermann Wien, 2001

Zum Beispiel Mathematik 2, Veritas, 2001

⁴ www.berater.bildung-rp.de/kfriebe

⁵ vgl. Anhang A1, A2 S 25

waren, zu achsensymmetrischen Figuren zu ergänzen. Die Schritte zur genauen Konstruktion von achsensymmetrischen Bildern hatten wir noch nicht besprochen. An diese wollen wir uns jetzt mit einem neuen Hilfsmittel, dem Computerprogramm, herantasten.

Zunächst behandelten wir die Achsenspiegelung, spiegelten also eine Figur an einer gegebenen Achse, um dann umgekehrt die Achse symmetrischer Figuren zu finden.

2.2 Achsenspiegelung

Zu Beginn der Arbeit am PC nützte ich die Möglichkeiten von Cabri, Schüler mit Hilfe des Spurmodus, des Zugmodus und des Tools „Geradenspiegelung“ auf spielerische Weise symmetrische Bilder zeichnen zu lassen. Ihr Arbeiten ist dabei dem Zeichnen mit zwei Stiften nachempfunden, das schon in der ersten Klasse durchgeführt wurde.

2.2.1 Gespiegelte Bewegung

Dazu habe ich die Datei „**spiegeln mit Spur**“⁶ vorbereitet: Der Punkt P ist an der Geraden s gespiegelt (P'). Schaltet man nun den Spurmodus ein und markiert beide Punkte, so hinterlassen beide Punkte, wenn man P durch Ziehen mit der Maus bewegt, eine Spur. Folgen die Schüler den Anweisungen, entsteht automatisch das Spiegelbild der Figur, die sie auf der linken Seite der Geraden s mit der Maus zeichnen. Sie können also folgendes beobachten: Wird der Punkt P nach links gezogen, d. h. von der Geraden s weggezogen, bewegt sich der Punkt P' nach rechts, bzw. ebenfalls von der Geraden s weg. Bei einer Bewegung des Punktes P mit der Maus zum oberen Bildschirmrand wird auch P' zum oberen Bildschirmrand bewegt usw..

Die Schüler üben dabei nicht nur, mit der Maus zu arbeiten und das Programm zu verwenden, sondern beobachten auch, wie symmetrische Figuren entstehen. Es sollte ihnen bewusst werden, dass die Bewegung zur Spiegelachse oder von ihr weg für das Spiegelbild von besonderer Bedeutung ist und eine andere Auswirkung hat als eine Bewegung parallel zur Achse.

2.2.2 Spiegeln nach Augenmaß

Bei der nächsten Aufgabenstellung geht es darum, dass die Schüler das Spiegelbild einer gegebenen Figur zeichnen. Dabei ist mir wichtig, dass sie das Spiegelbild noch nicht konstruieren, sondern ihr soeben gewonnenes Wissen, dass die „Nähe“ eines Punktes zur Spiegelachse eine wichtige Rolle spielt, anwenden.

In der vorbereiteten Datei⁷ habe ich wieder eine Gerade s und eine Figur, hier ein Dreieck, vorgegeben. Die Schüler sollen einfach ein Dreieck so zeichnen, dass es das Spiegelbild des gegebenen Dreiecks sein könnte. Hier ergibt sich eine besondere Schwierigkeit, die durch das Arbeiten mit dem PC hervorgerufen ist – da man den Bildschirm nicht falten und mit einer Nadel die Punkte auf die zweite Blatthälfte übertragen kann, müssten die Merkmale symmetrischer Figuren, die zur genauen Konstruktion des Spiegelbildes notwendig sind, herangezogen werden. Auf diese habe ich aber zu diesem Zeitpunkt noch nicht ausdrücklich hingewiesen, vielmehr wollte ich durch diese Aufgabe die Frage provozieren, welche Bestimmungsgrößen denn bei der Konstruktion symmetrischer Figuren wichtig sind.

In einem weiteren Schritt sollten die Schüler mit Hilfe des Programms überprüfen, ob sie korrekt gezeichnet haben, indem sie ihre Zeichnung mit dem Spiegelbild, das Cabri erzeugt, vergleichen.

⁶ vgl. Anhang A3 S 26

⁷ vgl. Anhang A4 S 26

2.2.3 Untersuchungen an gespiegelten Figuren

Ziel der folgenden Aufgabenstellungen war es, zu den wichtigsten Erkenntnissen, aus denen man eine Konstruktionsanleitung ableiten kann, zu führen. Dazu sollten die Kinder im nächsten Schritt eine einfache symmetrische Figur untersuchen („**Lage der Punkte**“⁸):

Das Fünfeck ABCDE wurde an der Geraden s gespiegelt. In einem ersten Schritt sollen die Schüler die Eckpunkte der Bildfigur entsprechend beschriften. Hier geht es also darum zu erkennen, welche Punkte durch die Abbildung einander zugeordnet sind. Der Zugmodus des Programms kann hier als Hilfsmittel eingesetzt werden. (vgl. Aufgabenstellung auf dem Arbeitsblatt)

In einem zweiten Schritt sind die Schüler aufgefordert zu beobachten, was passiert, wenn die Spiegelachse parallel verschoben wird. Dazu ist es notwendig, die Achse im Punkt S anzufassen. Das Spiegelbild der gegebenen Figur wird ebenfalls parallel verschoben und wieder verändert sich der Abstand der beiden Figuren von der Achse in gleicher Weise.

In der dritten Aufgabe sollen nun die Schüler zusammengehörenden Punkte verbinden. Sie sollen dabei erkennen, dass diese Verbindungsstrecken zueinander parallel sind und normal auf die Symmetrieachse stehen.

2.2.4 besondere Eigenschaften symmetrischer Figuren

Die nächste Aufgabenstellung („**eine symmetrisch liegende Figur**“⁹), am Beginn der nächsten Unterrichtseinheit ausgeteilt, dient einerseits der Wiederholung des bisher Erkannten, erhält andererseits als weiterführende Anregung die Frage nach der Besonderheit der Schnittpunkte, die durch die Verbindungslinien AA' , BB' usw. mit der Spiegelachse s gebildet werden. So wird die Aufmerksamkeit der Schüler auf jene Eigenschaften von achsensymmetrischen Figuren gelenkt, die für eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal bedeutend sind. Die Schüler sind zum ersten Mal aufgefordert, ihre Erkenntnisse auf das Arbeitsblatt¹⁰ einzutragen: Die Verbindungsstrecke von Punkt zu Bildpunkt schließt mit der Achse einen rechten Winkel ein und wird von ihr halbiert. Um dies zu überprüfen, können sie die entsprechenden Tools zum Messen von Winkeln und Strecken verwenden.

2.2.5 Symmetralen mit Cabri zeichnen

Durch die Aufgabe „**Wo liegt die Spiegelachse?**“¹¹ soll das Wissen der Schüler gefestigt und vertieft werden. Dazu kehre ich die Aufgabenstellung um. Vorbereitet sind eine Figur und ihr Spiegelbild, das mit Hilfe von Cabri erzeugt wurde. Die Spiegelachse habe ich ausgeblendet, sodass für die Schüler nur die beiden Figuren zu sehen waren. Zur Lösung dieser Aufgabe sollen die Schüler die bisher gewonnenen Erkenntnisse anwenden: der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von Punkt zu Bildpunkt liegt auf der Spiegelachse. Zeichnen sie Verbindungsstrecken zusammen gehörender Punkte, so können sie mit Hilfe des Tools „Mittelpunkt einer Strecke“ die gesuchten Punkte durch das Programm konstruieren lassen. Verbinden sie diese Mittelpunkte, so erhalten sie die gesuchte Symmetrale. Wieder ermöglicht es das Programm zu überprüfen, ob die gefundenen Lösung richtig ist. Die Schüler können also die Symmetrieachse einzeichnen, ohne eine genaue Konstruktionsanleitung für die Symmetrale zu kennen.

⁸ vgl. Anhang A5 S 27

⁹ vgl. Anhang A6 S 27

¹⁰ vgl. Anhang A7 S 28

¹¹ vgl. Anhang A8 S 29

2.3 Konstruktion der Strecken- und Winkelsymmetrale

Ziel der folgenden Schritte ist die exakte Konstruktion einer Strecken- bzw. Winkelsymmetralen mit Zirkel und Lineal. Dabei ging ich von der Frage aus, wie ich den Schülern das Verwenden des Zirkels bei der Konstruktion einer Symmetrale erklären könnte. Den Mittelpunkt einer Strecke findet man ja schließlich auch mit dem Geodreieck und eine Normale kann man ebenfalls mit diesem Hilfsmittel zeichnen. Für das Zeichnen einer Winkelsymmetrale ist mir allerdings kein entsprechendes Hilfsmittel bekannt. Außerdem sollte in dieser Unterrichtseinheit von einer mathematischen Beschreibung der Streckensymmetralen als Menge aller Punkte, die von zwei gegebenen Punkten den gleichen Abstand haben, ausgehend eine Konstruktionsanleitung formuliert werden.

Die Möglichkeit, einen Kreis auf Knopfdruck an einer Geraden spiegeln und die Zeichnung wieder variieren zu können, waren für mich hier der Grund für den Einsatz des Computers.

2.3.1 Streckensymmetrale

So wie im ersten Teil dieser Unterrichtssequenz vermied ich auch hier, den Schülern vorzuzeigen, wie man die gesuchte Konstruktion durchführt. Stattdessen habe ich für die weiteren Überlegungen das Arbeitsblatt „Streckensymmetrale“¹² vorbereitet: In der ersten Aufgabe sollen die Schüler einen Kreis zeichnen, der die Gerade s schneidet. Dieser Kreis ist mit Hilfe des Cabri - Tools an der Geraden zu spiegeln und die Schnittpunkte der beiden Kreise sind zu markieren.¹³ Wurde mit Hilfe des Zugmodus die Größe des zuerst gezeichneten Kreises verändert, so änderte der gespiegelte Kreis ebenfalls seine Größe. Die Schüler sollten dabei beobachten, dass die Schnittpunkte, sofern sie vorhanden sind, der beiden gleich großen Kreise immer auf der Geraden, an der gespiegelt wurde, liegen, egal wie groß die Radien der beiden Kreise gewählt wurden.

Um diese Behauptung zu überprüfen und zu bekräftigen, habe ich in der folgenden Aufgabe die Schüler aufgefordert, einen Punkt an einer Geraden zu spiegeln und um diese beiden Punkte beliebige Kreise zu zeichnen. Die Schnittpunkte dieser Kreise liegen im Allgemeinen nicht auf der Geraden s . Die Antwort auf die Frage, unter welcher Bedingung die Schnittpunkte der beiden Kreise auf der Geraden liegen, war auf dem Arbeitsblatt einzutragen und die erste Streckensymmetrale mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

Das nächste Arbeitsblatt „Strecken- und Winkelsymmetrale“¹⁴ weist schon in seinem Titel auf den nächsten Lerninhalt hin, den es anzueignen gilt. Die Datei mit dem Namen „Streckensymmetrale“¹⁵ zeigt eine Gerade, auf der einige Punkte (S, T, K und H) markiert sind, einen Punkt P und die Verbindungsstrecke PS. Die Strecke PS ist nun an der Geraden mit Hilfe eines Programmbefehls zu spiegeln (P'S) und die Längen dieser beiden Strecken sind zu vergleichen. Wird das entsprechende Tool zum Messen von Strecken ausgewählt, so erscheint die Maßzahl der Länge der Strecke. Wenn man nun die Länge der Strecke verändert, indem man den Punkt S auf der Gerade verschiebt, so verändert sich automatisch auch die Längenangabe. In diesem Teil der Arbeit sollte die Aufmerksamkeit der Schüler auf die Tatsache gerichtet werden, dass alle Punkte der Streckensymmetralen s von dem Punkt P und von seinem Spiegelbild P' denselben Abstand haben. Der Satz auf dem Arbeitsblatt ist entsprechend zu vervollständigen.

¹² vgl. Anhang A10 S 30

¹³ vgl. Anhang A9 S 29

¹⁴ vgl. Anhang A11 S31

¹⁵ vgl. Anhang A12 S32

2.3.2 Winkelsymmetrale

Die Zeichnung, die am Ende der Arbeit zur Streckensymmetrale auf dem Bildschirm dargestellt ist, enthält also die Gerade s , die Strecken PS und ihr Spiegelbild $P'S$. Es zeigt sich, dass die Gerade s den Winkel PSP' halbiert. Somit ist es nur ein kleiner Schritt zur Winkelsymmetrale.

In der vorbereiteten Datei mit diesem Namen¹⁶ fehlt die gesuchte Gerade, die als Symmetrale der Strecke AB eingeführt wird. Wenn – so wissen wir aus der letzten Aufgabe – die Punkte A und B von S gleich weit entfernt sind, so liegt S auf der Streckensymmetrale von AB und diese Symmetrale halbiert den Winkel ASB . Die Konstruktion der gesuchten Gerade erfolgt also am PC über das Tool „Mittelsenkrechte“. Falls diese Gerade nicht durch den Scheitel des Winkels geht, muss noch einmal wiederholt werden, welche Bedingungen die markierten Punkte auf den Scheiteln erfüllen müssen¹⁷: Wenn also auf jedem Schenkel eines Winkels ein Punkt markiert wird und diese beiden Punkte von dem Scheitel des Winkels gleich weit entfernt sind, dann halbiert die Streckensymmetrale dieser Punkte den Winkel. Die Konstruktion einer Winkelsymmetrale mit Zirkel und Lineal dürfte für die Schüler nun kein Problem mehr darstellen.

Wie sind aber jetzt meine Schüler mit meinen Plänen umgegangen? Wie haben sie reagiert, wie haben sie gelernt? Welche Schlüsse kann ich aus den Ergebnissen ziehen?

¹⁶ vgl. Anhang A13 S32

¹⁷ vgl. Fragestellung auf dem Arbeitsblatt Strecken- und Winkelsymmetrale (S31) und A14 S 32

3 Ergebnisse des Unterrichts

In diesem Kapitel möchte ich auf die konkreten Ergebnisse des Unterrichts eingehen. Ich werde dabei auf einige Schwierigkeiten, die aufgetreten sind, hinweisen, an der einen oder anderen Stelle eine Interpretation der Schülerarbeiten versuchen und einige Vermutungen über die Ursachen der Fehler aufstellen.

Die folgenden Ausführungen nehmen Bezug auf die Aufzeichnungen über meine Beobachtungen, die ich nach den jeweiligen Unterrichtsstunden geschrieben habe bzw. auf Ergebnisse der Schülerarbeiten.

Die Schüler arbeiteten zu zweit an einem Gerät, zum ersten Mal mit einem Geometrieprogramm. Ihre Partner konnten sie selbst wählen. Sowohl für die Schüler als auch für mich war das Arbeiten mit dem PC im Mathematikunterricht neu - ein Grund für manche kleine Panne, die bei unserer Arbeit aufgetreten ist und auf die ich nicht vorbereitet war.

So hatte ich bei den ersten Dateien die Arbeitsanweisungen direkt neben die vorbereitete Zeichnung platziert. War die Zeichnung am Bildschirm in der Schule groß genug, um gut arbeiten zu können, so war der Aufgabentext nicht oder nur teilweise zu sehen. Deshalb musste ich dazu übergehen, die Aufgabenstellung auszudrucken. Die Schüler bekamen daher Disketten mit den von mir vorbereiteten Cabri-Dateien und kodierte Blätter mit Arbeitsaufträgen und Fragestellungen.

Obwohl ich während dieser Unterrichtsstunden ständig unterwegs war, hatte ich kaum die Möglichkeit, den Lernfortschritt der Schüler zu registrieren. Ich half bei Problemen mit den Geräten, beantwortete Fragen, hielt die Schüler an, doch den gesamten Text des Arbeitsblattes durchzulesen, war also ständig in persönlichem Kontakt zu jeweils einem Schülerpaar. Dennoch hatte ich den Eindruck, mehr als im „normalen“ Unterricht darauf vertrauen zu müssen, dass die Lernenden die gebotenen Inhalte wirklich aufnahmen. Sie hatten sie ja „nur“ zu lesen bekommen und nicht von mir gehört. Um so wichtiger und aufschlussreicher sind die Ergebnisse der Schülerarbeiten und die kurzen Überprüfungen, die ich in Form von Hausübungen vorwiegend als Arbeiten mit Zirkel und Lineal gegeben habe.

3.1 erste Arbeiten mit dem Computer

Um das Vorgehen der Schüler nachvollziehen zu können und um ihren Lernfortschritt zu beobachten, habe ich die Dateien, die sie am Ende ihrer Arbeit gespeichert haben, angesehen.

Zur ersten Aufgabe **Spiegeln mit Spur** (Abb.1): Hier nützte ich die Möglichkeiten von Cabri, mit Hilfe des Spurmodus, des Zugmodus und des Tools „Achsen spiegeln“ auf spielerische Weise symmetrische Bilder zeichnen zu lassen.

Leider hat das Spiegeln mit Spur nicht bei jedem Gerät für beide Punkte funktioniert. Die betroffenen Schüler konnten nur die Bewegung des Bildpunktes sehen, nicht aber seine Spur, während die anderen lustige Bilder erzeugten. Die gespiegelte Bewegung, und das war mir das Wichtigste, konnten aber alle verfolgen.

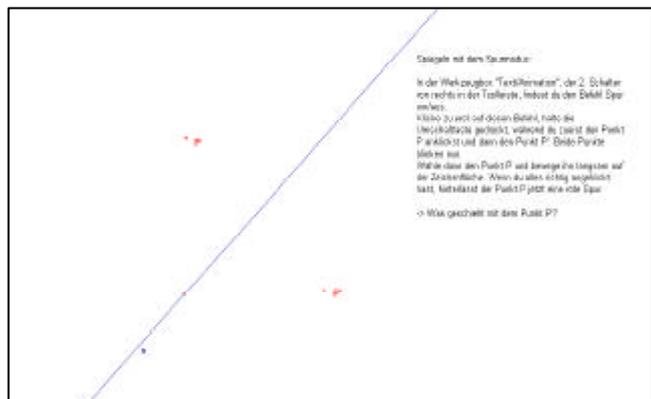


Abb. 1

Wie ein kurzer Auszug aus einem Unterrichtsgespräch, das ich im Anschluss an die ersten Erfahrungen mit dem PC zu Beginn der folgenden Stunde führte, zeigt, haben sich die Schüler intensiv mit der Materie beschäftigt und konnten sich sehr gut an die wichtigsten Inhalte und Bilder der letzten Stunde erinnern. Eine „falsche“ Antwort wurde sofort abgelehnt:

L: „Wenn P nach rechts gezogen wird, dann wird P' nach ...?“ S: „links gezogen.“
 L: „Wenn P nach links gezogen wird, dann wird P' nach ...?“ S: „rechts gezogen.“
 L: „Wenn P nach oben gezogen wird, dann wird P' nach ...?“ Yasmin: „unten gezogen.“
 Die Klasse protestierte lautstark!

Die zweite Aufgabe „**Spiegeln mit Augenmaß**“ bereitete schon größere Schwierigkeiten als ich vermutet hatte, wurde von den Schülern aber als Herausforderung angenommen. Hier einige Beispiele:

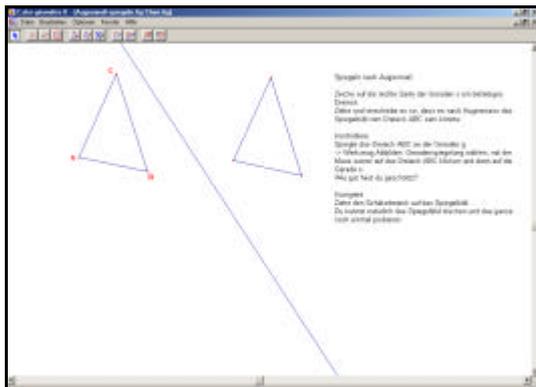


Abb. 2

Dieses Bild zeigt die Arbeit von Chen (Abb.2). Er hat nicht gespiegelt, er hat das Dreieck verschoben. War ihm die Aufgabenstellung unklar, liegt hier ein Missverständnis vor oder ist das Zeichnen von Spiegelbildern doch komplizierter als ich gedacht hatte?

Auch Clara hat diese Aufgabe so ähnlich wie Chen gelöst. Sie zeichnete mit Unterstützung von Ricci zunächst folgendes Dreieck. (Abb.3)

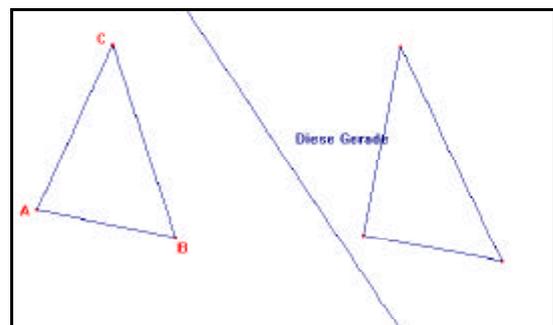


Abb. 3

Es folgt ein kurzer Ausschnitt aus unserem Gespräch: L: „Wo liegt A' ?“ C: „Hier“, deutete auf den linken unteren Punkt ihres Dreiecks, „und B' liegt hier“ (rechter Punkt). Dann schaute sie mich an und sagte: „ A' und B' sollten vertauscht werden!?“

Auch Babsi und Lisa zeichneten ähnlich. Auf meine Frage, ob sie mit dem Ergebnis ihrer Arbeit zufrieden sind, antwortet Babsi: „sie sind nicht gleich – wir haben es verschoben!“
 Lisa: „Gibt es da ein Lineal zum Abmessen?“

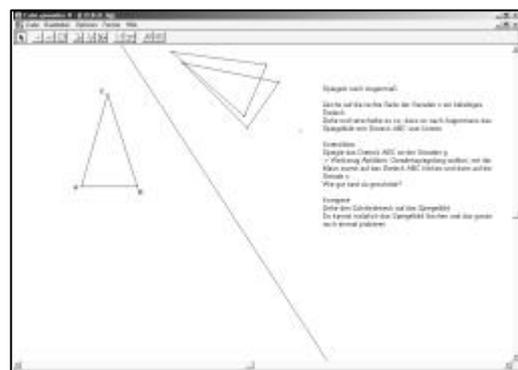


Abb. 4

Die meisten haben also ein zu dem gegebenen Dreieck „ähnliches“ zweites Dreieck auf der anderen Seite der Geraden gezeichnet, was eher dem Ergebnis einer Schiebung als dem einer Spiegelung entsprechen würde und waren von der Korrektur durch den PC sehr überrascht. Sie versuchten ein zweites Mal das geforderte Dreieck zu zeichnen und manche verschoben zum Schluss die Ausgangsfigur so, dass die vom Programm konstruierte Bildfigur auf ihre gezeichnete Bildfigur passte. So in diesem Beispiel (Abb.4), dem Ergebnis des zweiten Versuchs von Lisa und Babsi.

Die nächste Abbildung (Abb.5) zeigt, wie Andrij und Edvin die Aufgabe, das Spiegelbild des linken Dreiecks zu zeichnen, gemeistert haben. Man hat den Eindruck, dass die beiden die schräge Lage der Symmetrieachse berücksichtigen wollten. Das Bild der Strecke AB würde einer Spiegelung an einer vertikalen Achse entsprechen, aber das Bild von C nicht. Ich vermute also, dass die Schüler die besondere Schwierigkeit der Aufgabe erkannt haben, die richtige Lösung aber nicht finden konnten. Bemerkenswert ist außerdem, dass die Länge des Dreiecksumfangs eine wichtige Rolle bei ihren Betrachtungen spielte.

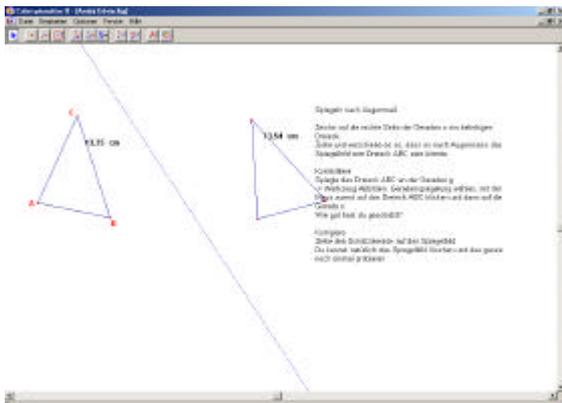


Abb. 5

Martin und Barbara haben diese Aufgabe ebenfalls mit Hilfe der Seitenlängen des Dreiecks gelöst (Abb. 6). Lasse ich ihre Konstruktionschritte durch das Programm wiederholen, so fällt auf, dass sie zuerst die Längen der Seiten des gegebenen Dreiecks anzeigen ließen, um dann ein Dreieck zu zeichnen, bei dem die entsprechenden Seitenlängen etwa die gleiche Länge haben. Interessant ist, dass die beiden das gegebene Dreieck eher gedreht als gespiegelt haben (der Umlaufsinn der Seiten ist erhalten) Barbaras Kommentar: „Es ist nicht gleich!“

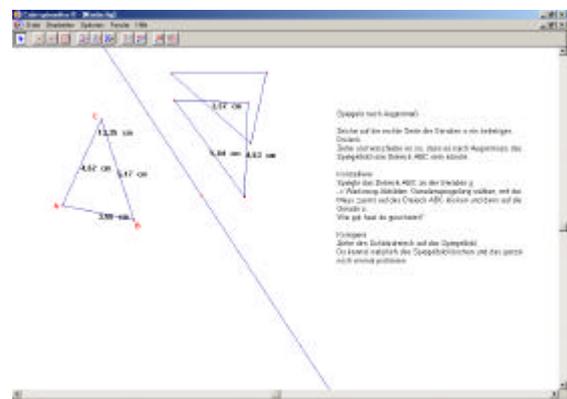


Abb. 6

Darija hat ebenfalls umfangsgleiche(!), nahezu kongruente Dreiecke gezeichnet (Abb. 7). Auch sie hat eher „verschoben“ als gespiegelt.

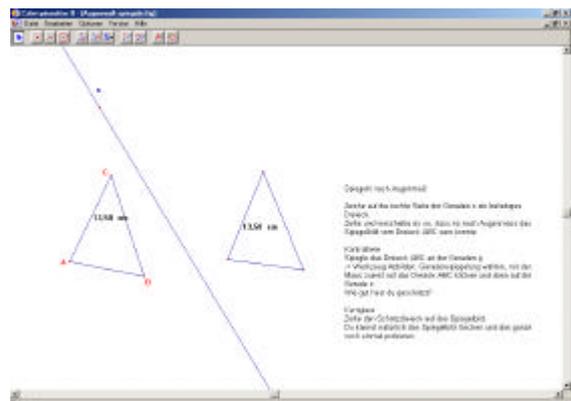


Abb. 7

Mit diesen Ergebnissen hatte ich nicht gerechnet. Ich ging ja von der Voraussetzung aus, dass die Schüler auf Grund ihres Vorwissens das Spiegelbild dieses Dreiecks zeichnen konnten. Im einleitenden Gespräch (vgl. Symmetrie in Natur und Kunst) hatten sie die Darstellungen folgendermaßen charakterisiert: „Man kann sie in der Mitte teilen“, „Sie (die Hälften) sind gleich, aber doch anders“, „sie sind vertauscht“.

Wenn ich diese ersten vagen Beschreibungen von Symmetrie in Zusammenhang mit den Arbeiten der Schüler bringe, so liegt für mich die Vermutung nahe, dass einige Schüler die Aufgabe lösen, indem sie das Dreieck auf die andere Seite der Achse noch einmal zeichnen. Das Spiegelbild soll ja „genauso aussehen“ wie die ursprüngliche Figur („sie sind gleich“). Die Bemerkung „...aber doch anders“ konnte noch nicht berücksichtigt werden. (vgl. Gespräch mit Clara S8: Erst im Gespräch mit mir erkennt sie, dass die beiden Punkte A' und B' vertauscht sein müssten.)

Vielleicht liegt auch in der Aufgabenstellung eine besondere Schwierigkeit, die ich nicht beachtet hatte: Bei den Aufgaben, die von den Schülern in der 1. Klasse zu lösen waren, ging es unter anderem auch darum, eine Figur, die auf kariertem Papier gezeichnet war, so zu ergänzen, dass ein achsensymmetrisches Bild entsteht. Die Beispiele in dem Schulbuch bzw. in den von mir ausgeteilten Kopien waren so gewählt, dass sich aus der gezeichneten Hälfte eine Vorstellung gewinnen lässt, wie das gesamte Bild aussehen dürfte. Auch beim Spiegeln mit Spur mussten die Schüler nur eine Hälfte der Figur zeichnen, die spiegelbildliche Ergänzung erzeugte das Programm. In der Aufgabe Spiegeln nach Augenmaß war aber ein Dreieck zu spiegeln, eine „ganze“ Figur. Eine Vorstellung, wie das Ergebnis aussehen könnte, wird durch diese Angabe aber nicht provoziert.

Beachtenswert finde ich bei den drei zuletzt angeführten Arbeiten, dass das Messen der Längen eine besondere Rolle spielt. Ich gehe davon aus, dass die Schüler berücksichtigen, dass beim Spiegeln die Längen erhalten bleiben und sich deshalb bemühen, ein Dreieck mit annähernd gleichen Maßen zu zeichnen. Bei zwei dieser Arbeiten ist auch die Lage Spiegelbildes beachtenswert (vgl. Abb.5 und Abb.6).

Ich habe hier nur einige charakteristische Schülerarbeiten angeführt, die zeigen, wie die Schüler die Aufgabe, ein Dreieck an einer schrägen Achse zu spiegeln, gelöst haben. Dass kein Ergebnis eine annähernd zufriedenstellende Lösung zeigt, dürfte auch durch die Lage der Achse zu begründen sein. Alle Bilder, die wir zu Beginn der Unterrichtseinheit betrachtet hatten, waren zumindest auch zu vertikalen Achsen symmetrisch. Schräge Spiegelachsen wie z. B. bei dem gotischen Fenster¹⁸ wurden in unserem Gespräch nicht besonders hervorgehoben.

Welche Gründe für die aufgetretenen Schülerfehler ausschlaggebend waren, müsste von mir eigens untersucht werden. In der konkreten Unterrichtssituation war es allerdings wichtiger, dass die Schüler durch ihre „Fehler“ die Aufgaben- und Problemstellung besser verstanden. Weitere Untersuchungen an symmetrischen Bildern waren also notwendig.

¹⁸ vgl Anhang A2 S 25

3.2 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Die erste Konstruktion, die mit den Zeichengeräten durchzuführen war, hat sich sehr an die Arbeit am Computer angelehnt (Abb. 8). Die Datei „Lage der Punkte“ habe ich als Vorlage für folgendes Aufgabenblatt verwendet:

Neben der Konstruktion sollten auch die einzelnen Konstruktionsschritte angeführt werden.

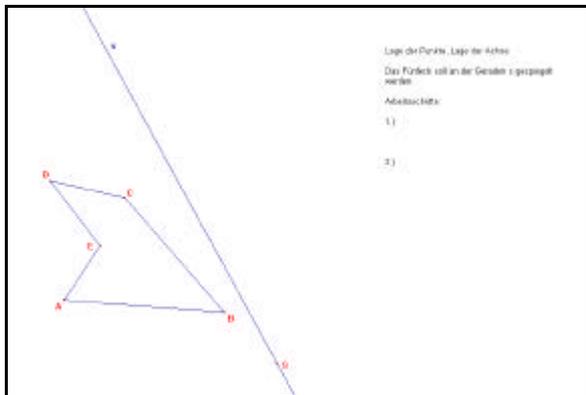


Abb. 8

Obwohl die Schüler geradeauf dem Arbeitsblatt „eine symmetrisch liegende Figur“¹⁹ aufgeschrieben hatten, dass die Verbindungsstrecken zwischen Ur- und Bildpunkten normal auf die Spiegelachse stehen und dass diese Punkte von der Achse denselben Abstand haben, war häufig der rechte Winkel zwischen Achse und Verbindungsstrecke nicht berücksichtigt worden. Obwohl das Ergebnis dieser Konstruktion in der Datei „Lage der Punkte“ zu sehen gewesen war, haben doch sehr viele falsche

Zeichnungen abgegeben. Die Ähnlichkeit zu der Datei, die in der vorangegangenen Unterrichtsstunde zu bearbeiten war, hat nicht geholfen. Wenn also Schüler eine Frage richtig beantworten, so folgt daraus noch nicht unbedingt, dass sie die entsprechenden Handlungen auch richtig durchführen. Bei den meisten genügte allerdings ein kleiner Hinweis.

Nur ein Mädchen blieb aber trotz allem ihrer Version treu: Ihr größtes Problem war anscheinend die Lage der Spiegelachse (Abb. 9).

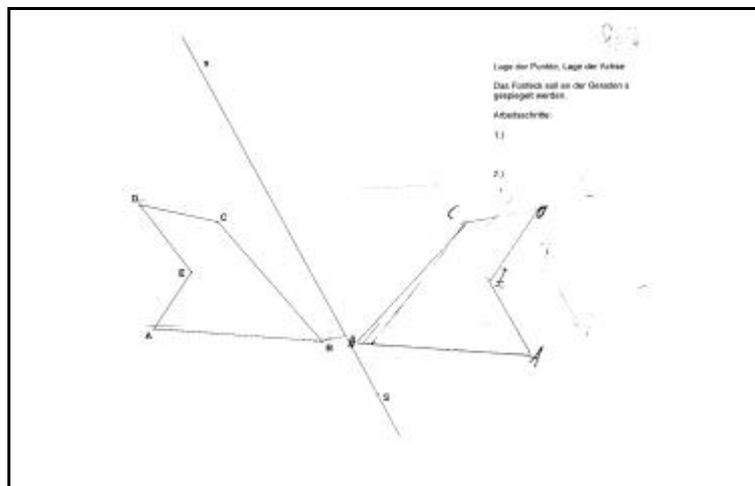


Abb. 9

Als Hausübung habe ich dann ein Blatt²⁰ ausgeteilt, auf dem bei verschiedenen Figuren die Symmetrieachsen einzuzeichnen waren. Hier war besonders auffallend, dass viele Schüler angaben, dass die Diagonalen eines Rechtecks ebenfalls Symmetrieachsen wären. Über meine Korrektur waren sie sehr erstaunt. Ihren Fehler haben sie erst eingesehen, nachdem ich das Geodreieck an eine Diagonale gelegt habe und so zeigen konnte, wo die Bilder der Eckpunkte liegen müssten.

¹⁹ vgl Anhang A 6 S 27

²⁰ vgl Anhang A15 S 33

Allzu gerne stolpern die Kinder über Fallen, die ich eigentlich nicht stellen wollte. Ihre Fehler lassen sich dann meist darauf zurückführen, dass sie bestimmte Gesetzmäßigkeiten nicht beachtet haben. So wird ein Rechteck durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke geteilt, in der Sprache der Schüler „man kann es in der Mitte teilen und die Teile sind gleich groß“.

3.3 Strecken- und Winkelsymmetrale mit dem PC

Die Aufgaben zu Strecken- und Winkelsymmetralen bereiteten keine weiteren Schwierigkeiten. Die Frage, „wo liegt die Spiegelachse“, war mit den Tools von Cabri leicht zu beantworten. (vgl. Abb. 10)

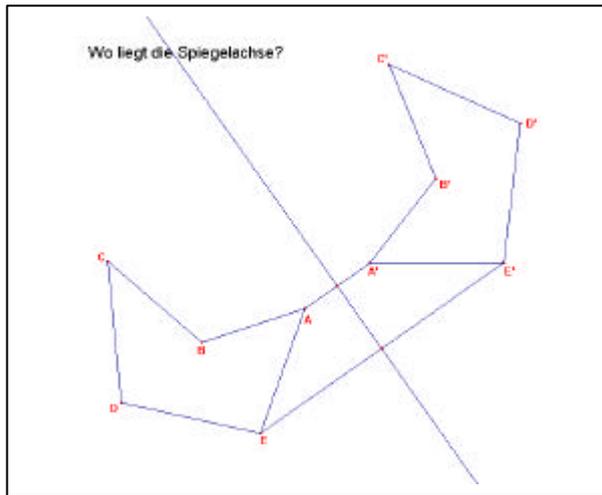


Abb. 10

Die folgenden Beispiele zeigen, wie die Schüler die Symmetrale des Winkels ASB gezeichnet haben. Während Jae und Chen nur die Abstände der Punkte A und B von S überprüft haben (Abb. 11), messen Darija und Christine auch die Winkel zwischen den Schenkeln und der Symmetrale und überprüfen so, ob die Gerade, den Winkel halbiert (Abb. 12)

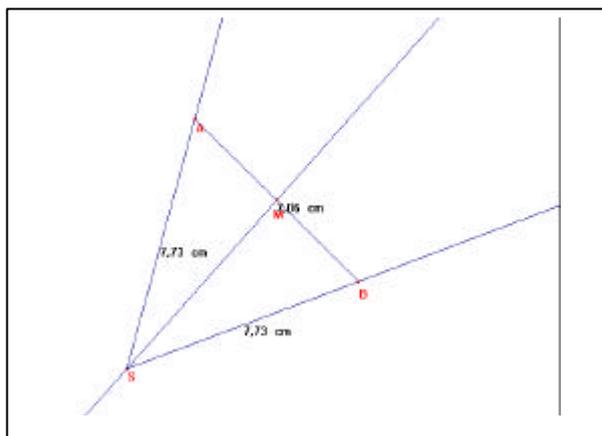


Abb. 12

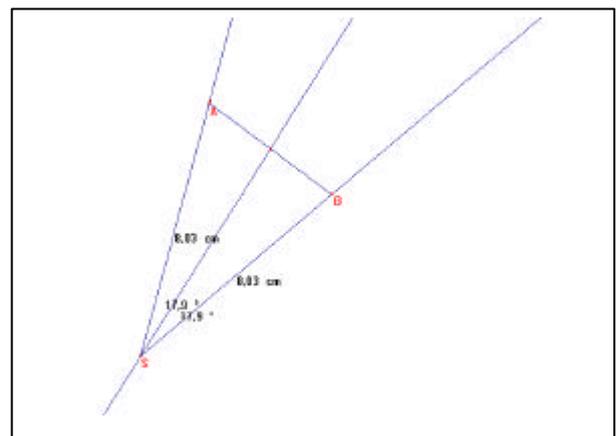


Abb. 11

3.4 Schularbeitsergebnisse

In den Vorbereitungsstunden zur Schularbeit ist mir aufgefallen, dass die Lernenden sehr an „richtigen“ Antworten interessiert sind. Sie wollen wissen, was sie auf Fragen bei der Schularbeit antworten müssen, beinahe welche Formulierungen erwartet werden. Sie sind dabei sehr hellhörig auf das, was ich in irgendeiner Weise betone. So haben wir z. B. in den beiden letzten Stunden vor der Schularbeit u. a. den Unterschied zwischen Spiegelung und Drehung wiederholt. Auf die Frage, woran sie erkennen, ob es sich bei der gegebenen Abbildung um eine Drehung oder eine Spiegelung handelt, haben die meisten als Argument genannt, dass der Umlaufsinn verändert ist. Die weiteren charakteristischen Merkmale einer Spiegelung wurden kaum erwähnt.

Hier einige Beispiele:

Barbara (Abb. 13):

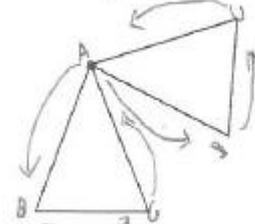
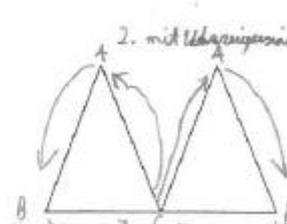
4.2		<p>7.) Liegt bei diesen Abbildungen eine Drehung oder eine Spiegelung vor? Zeichne das Drehzentrum oder die Spiegelachse ein und schreibe auf, woran du erkennst, dass es sich um eine Drehung oder eine Spiegelung oder um keines von beiden handelt.</p>
		<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;">  <p>Keines von beiden (nicht gleich groß)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>gl. Umlaufsinn Drehung (Beschriftung gleich)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>1. gg. Umlaufsinn 2. mit Umlaufsinn Spiegelung (da Beschriftung umgedreht)</p> </div> </div>

Abb. 13

Clemens (Abb. 14)

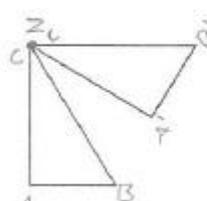
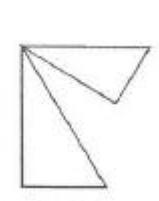
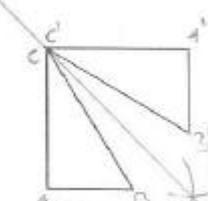
4.2		<p>7.) Liegt bei diesen Abbildungen eine Drehung oder eine Spiegelung vor? Zeichne das Drehzentrum oder die Spiegelachse ein und schreibe auf, woran du erkennst, dass es sich um eine Drehung oder eine Spiegelung oder um keines von beiden handelt.</p>
		<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;">  <p>Der Umlaufsinn bleibt gleich - Drehung</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Der Flächeninhalt ist nicht der gleiche keine Drehung - keine Spiegelung</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Der Umlaufsinn ändert sich - Spiegelung</p> </div> </div>

Abb. 14

Martin (mit Fehler bei der ersten Figur, Abb. 15)

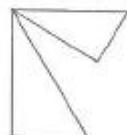
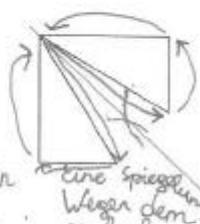
4.2	<p>7.) Liegt bei diesen Abbildungen eine Drehung oder eine Spiegelung vor? Zeichne das Drehzentrum oder die Spiegelachse ein und schreibe auf, woran du erkennst, dass es sich um eine Drehung oder eine Spiegelung oder um keines von beiden handelt.</p>
	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;">  <p>Keines von beiden weil normal die Seiten gleich lang sein müssten</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Keines von beiden weil sonst die Seiten gleich lang sein müssten</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>eine Spiegelung wegen dem Umlaufsinn. es wird von außen</p> </div> </div>

Abb. 15

Die zweite angeführte Aufgabe der Schularbeit – sie gehört zur „Erweiterung“ und damit zu den anspruchsvollen Aufgaben, die ich den leistungsstarken Schülern anbiete, damit sie zeigen können, dass sie selbstständig Wissen und Können auf für sie neuartige Aufgaben anwenden können – zeigt mir deutlich, dass die Schüler in dieser Unterrichtssequenz gelernt haben, sich mit einem mathematischen Sachverhalt selbsttätig auseinander zusetzen. Die natürlich noch vollkommen unmathematischen Begründungsversuche bei dieser Aufgabe finde ich bemerkenswert.

Hier wieder einige Beispiele:

Clemens Erklärung ist sicher fragwürdig (Abb. 16). Allerdings scheut er sich nicht, eine Begründung zu geben und erwähnt dabei eine Eigenschaft der Symmetrale.

4.2	<p>11.) Zeichne einen Kreis mit $r = 4$ cm. Wähle zwei Punkte A und B auf der Kreislinie und zeichne die zugehörige Sehne ein. Warum geht die Streckensymmetrale der Strecke AB durch den Mittelpunkt des Kreises? Fridolin hat eine Skizze gezeichnet:</p>
	<p>weil die Streckensymmetrale normal auf die Strecke AB liegt und der Mittelpunkt des Kreises auch im rechten Winkel ^{zu der} an die Strecke AB ist</p> 

Abb. 16

Edvin zeichnet ebenfalls nicht sondern gibt nur eine knappe Begründung (Abb. 17):

4.2		<p>11.) Zeichne einen Kreis mit $r = 4$ cm. Wähle zwei Punkte A und B auf der Kreislinie und zeichne die zugehörige Sehne ein. Warum geht die Streckensymmetrale der Strecke AB durch den Mittelpunkt des Kreises? Fridolin hat eine Skizze gezeichnet:</p>
-----	--	---

Weil es nur 90° sind.
 Wenn die Streckensymmetrale nicht am Mittelpunkt wäre, wäre es nicht 90° .

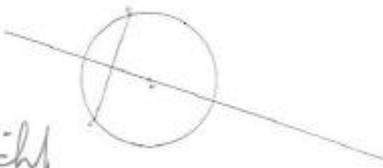


Abb. 17

Es ist auffallend, dass kein Schüler bei seiner Argumentation die Entfernung der Punkte A und B vom Mittelpunkt des Kreises anführt. Aber in jedem der angeführten Beispiele ist zu erkennen, wie die Kinder sich um eine Antwort bemühen.

Das gleiche gilt für die Arbeiten der anderen Gruppe.

Andrij löst folgende Aufgabe durch eine Konstruktion der Symmetrale (Abb. 18). Eine Erklärung folgt nicht.

4.2		<p>11.) Zeichne zwei Geraden, die einen Winkel von 64° einschließen. Wo liegen die Mittelpunkte der Kreise, für die diese Geraden Tangenten sind? Zeichne einen solchen Kreis. Vielleicht hilft dir die Skizze, die Mathilde gezeichnet hat!</p>
-----	--	--

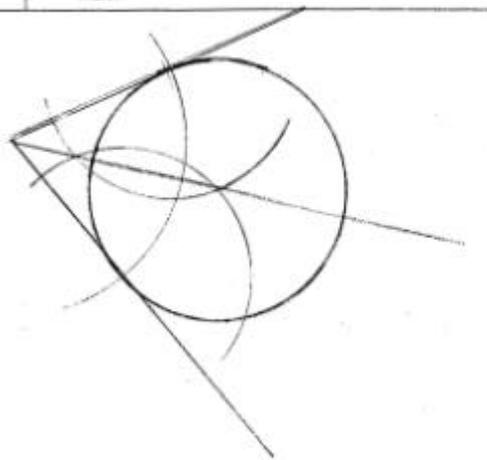



Abb. 18

Barbaras Lösung (Abb. 19):

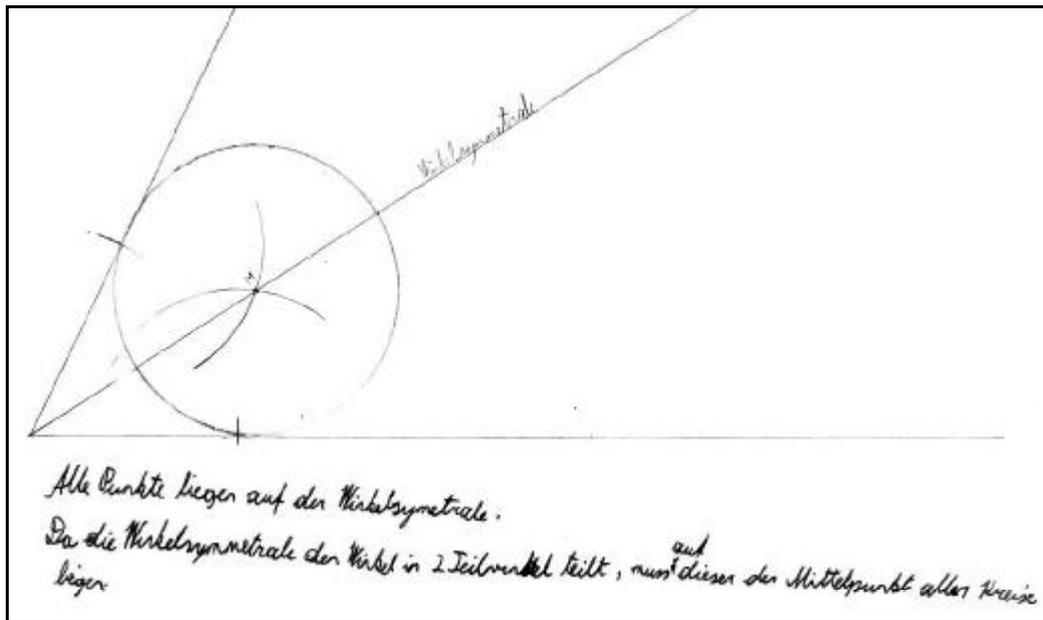


Abb. 19

Trotz aller Mängel, die bei diesen Arbeiten auftreten, bin ich mit diesen Ergebnissen sehr zufrieden. Es ist nicht zu erwarten, dass die Schüler exakte Begründungen liefern, wurden doch solche Beweise in den vorangegangenen Unterrichtsstunden nicht geübt. Hier hatten sie keine vorgegebenen Texte oder Schemata, an die sie sich halten konnten, die sie auswendig lernen konnten. Hier war eher eigenständiges Denken und Antworten gefragt.

Noch ein Wort zur Zeichengenauigkeit. Obwohl ich in diesen Unterrichtsstunden nicht wie bisher üblich auf eine exakte Ausführung der Zeichnungen gedrängt habe, sind die Ergebnisse besser als erwartet. Das Arbeiten mit dem Computer hat in dieser Hinsicht nicht geschadet, ganz im Gegenteil. Bisher war die Aufmerksamkeit der Schüler beim Geometrieunterricht auf zwei Probleme gleichzeitig gerichtet: Zum einen auf den Inhalt der Zeichnung, zum anderen auf die Form der Ausführung. Beim Arbeiten mit dem PC aber erfolgt die Konstruktion durch Eingabe einfacher Befehle. Der Schüler kann darauf vertrauen, dass der Befehl „Mittelpunkt einer Strecke“ wirklich den gewünschten Punkt anzeigt. Entsprechendes gilt selbstverständlich auch für Normale und Parallele. Ebenso werden die Längenangaben automatisch angezeigt. Messfehler bzw. Ungenauigkeiten sind nicht zu erwarten. Er kann sich ganz auf die inhaltlichen Aspekte der Aufgabe konzentrieren oder wie Max es ausdrückte: „*Man muss sich nicht auf den Bleistift konzentrieren sondern kann darauf schauen, wie's geht.*“

Und dieses „Wie's geht“ haben die Schüler in diesen Einheiten durch ihre Beschäftigung mit den Arbeitsblättern erfahren. Durch die Arbeit am PC waren alle aufgefordert, tätig zu werden. Eine rein beobachtende und abwartende Teilnahme am Unterricht war durchgängig nur schwer möglich. Ich selbst war in diesen Stunden nicht in der Rolle der Expertin, die allzu voreilig Lösungen bekannt gibt. Immer wieder baten mich einzelne um Hilfe und durch diesen intensiven Kontakt mit jeweils einem Schülerpaar konnte ich mehr auf die gestellten Fragen eingehen. Einige dieser Fragen musste ich dann allerdings mehrmals beantworten.

Außerdem gab es immer wieder Aufgaben, die den Schülern sichtlich Vergnügen bereiteten. Der Zugmodus selbst verführte die besonders schnellen zu weiteren Experimenten außer Konkurrenz.

3.5 Arbeitsblätter aus der Sicht der Schüler

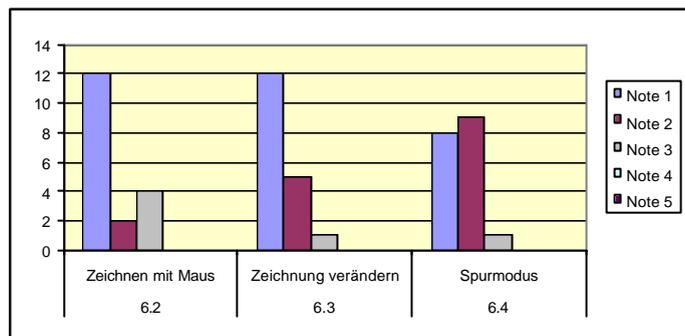
Um mein Bild von dieser Unterrichtssequenz zu vervollständigen habe ich den Schülern einen Fragebogen ausgeteilt, in dem ich erheben wollte, wie ihnen die Arbeit an den Geräten gefallen hat.²¹ Im Folgenden sollen die Ergebnisse zu einigen Fragen dargestellt werden. Es ging dabei um die Zusammenarbeit mit den Mitschülern, um das Arbeiten mit den Möglichkeiten, die Cabri bietet (Zeichnen mit der Maus, Zeichnungen verändern, Spurmodus), um eine vertiefte Auseinandersetzung mit dem Thema (Eigenschaften an fertigen Zeichnungen untersuchen, aus Zeichnungen Antworten ablesen, probieren und selber entdecken) und um die Möglichkeit, eigene Ideen mit dem Programm zu verwirklichen.

Durch weitere Fragen sollte geklärt werden, ob die Arbeitsblätter verständlich waren, ob die Schüler die Fragen richtig beantworten konnten und ob es ihnen lieber ist, wenn jemand sagt, was getan werden soll.

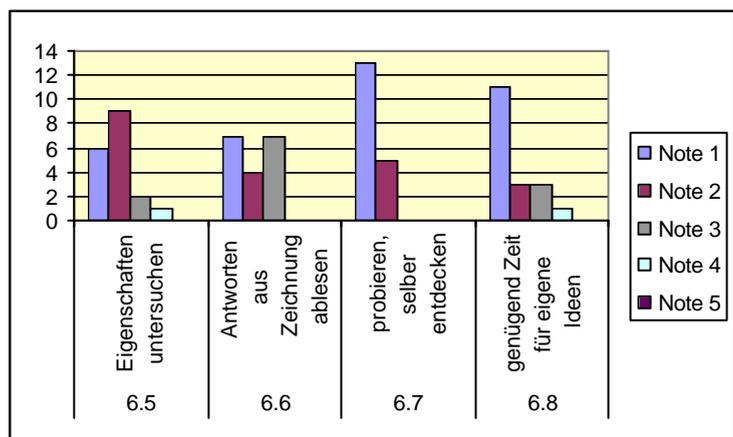
Zu den Ergebnissen:

15 von 18 Schülern fanden die Zusammenarbeit sehr gut (11) oder gut (4), nur 3 waren weniger zufrieden.

Die Möglichkeiten, die das Arbeiten mit Cabri bietet, wurden ebenfalls sehr geschätzt, wobei das Zeichnen mit dem Spurmodus nicht so positiv bewertet wurde, wie das Arbeiten mit dem Zugmodus. Ich nehme an, dass bei diesen Antworten die Tatsache eine Rolle spielt, dass wir nur einmal mit dem Spurmodus gearbeitet haben und dieser nicht bei allen Geräten gleich gut funktioniert hat, während die Schüler ständig mit der Maus ihre Zeichnungen verändert haben.



Das Konzept, die Eigenschaften symmetrischer Figuren an fertigen Zeichnungen untersuchen zu lassen, bzw. die Antworten auf die in den Arbeitsblättern gestellten Fragen aus den Bildschirmzeichnungen ablesen zu lassen, wurde eher mit gut bewertet, selber entdecken und probieren gefiel dagegen wieder sehr. Auch gaben mehr als die Hälfte der Schüler an, genügend Zeit gehabt zu haben, eigene Ideen mit dem Programm zu verwirklichen.

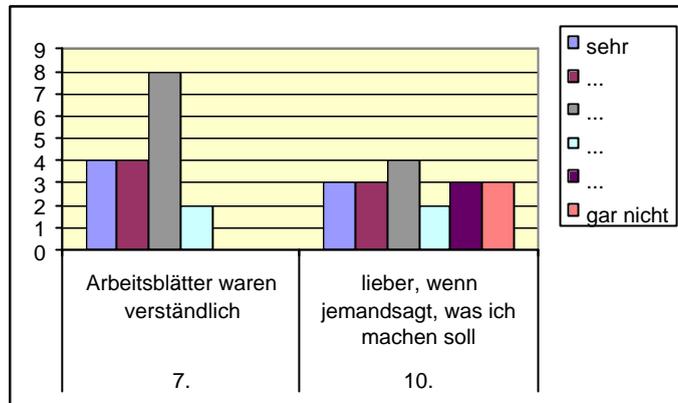


Aus den Antworten auf die Frage nach der Verständlichkeit der Arbeitsblätter ziehe ich den Schluss, dass ich meine Angaben und Texte verständlicher gestalten muss: Auf einer sechsteiligen Skala wurde 8 mal die dritte Stelle angekreuzt, 4 mal die zweite und 4 mal die erste. Für zwei Schüler waren die Arbeits-

²¹ vgl. Anhang A 16 S 35

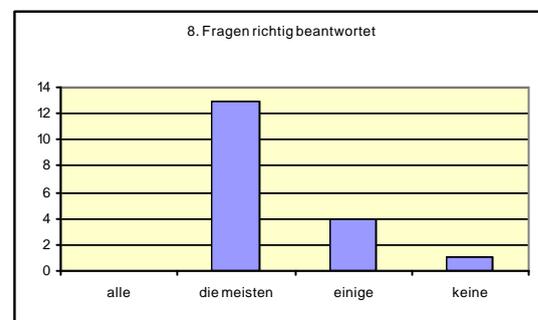
blätter weniger verständlich. Auch hier gilt, dass eine differenziertere Untersuchung notwendig wäre. Die Frage war hier sehr allgemein gehalten und wurde nicht in bezug zu bestimmten Arbeitsblättern, Frage- oder Aufgabenstellungen formuliert.

„Mir ist es lieber, wenn mir jemand sagt, was ich machen soll“ – auch diese Frage ist zugegeben sehr vage und missverständlich formuliert. Die sechs verschiedenen Antwortmöglichkeiten wurden auch annähernd gleich oft gewählt. Klare Anweisungen sind einerseits für Schüler sehr wichtig - die Angst vor möglichen Fehlern scheint sehr groß zu sein - andererseits möchte ich durch meine Unterrichtsarbeit erreichen, dass die Schüler, so wie ich in der Einleitung geschrieben habe, weniger nachmachen und nachzeichnen. Ich möchte sie viel mehr ermutigen, eigene Schritte zu wagen.



Wenn ich verschiedene Aussagen²² von Schülern während des Unterrichts hier berücksichtige, so komme ich zu dem Schluss, dass meine Vorgehensweise allerdings bei manchen Schülern Unsicherheit und Orientierungslosigkeit erzeugt, für manche auch das Gefühl, ineffizient zu arbeiten. (Andrij: „Warum müssen wir alles begründen, reicht es nicht, wenn Sie uns einfach sagen, wie es geht? Warum immer das Warum? Das funktioniert doch einfach so! Es wäre doch viel schneller, wenn Sie uns einfach sagen, was wir machen müssen!“).

Bemerkenswert finde ich, dass 13 der 18 befragten Schüler angaben, dass sie die meisten Fragen richtig beantworten konnten, dass sie, so interpretiere ich, mit ihren Leistungen sehr zufrieden waren und am Ende ihrer Arbeit fehlerfreie Ergebnisse vorweisen konnten.



Aus Äußerungen im weiteren Verlauf des Unterrichtsjahres kann ich entnehmen, dass die Arbeit am PC sehr positiv aufgenommen wurde, denn immer wieder wurde ich gefragt, ob wir nicht noch einmal ein Kapitel mit Cabri bearbeiten.²³

Zum Schluss noch einige Antworten auf die letzten beiden Fragen des Fragebogens. Hier waren die Schüler aufgefordert, mit eigenen Worten zum Einsatz des Computers im Mathematikunterricht Stellung zu nehmen.

²² „Was muss ich hinschreiben, wenn“ Solche Fragen wurden öfter in den Stunden gestellt, in denen wir die kommende Schularbeit vorbereitet und die Eigenschaften der Symmetrie wiederholt haben.

²³ Im Sommersemester haben die Schüler die „merkwürdigen Punkte des Dreiecks“ wieder mit Cabri konstruiert und sich die dazu notwendigen Informationen teils aus dem Schulbuch, teils aus den Internet gesucht.

Ich finde es gut, einen Computer auch im Mathematikunterricht zu verwenden weil.....

- Es Spaß macht
- Man, wenn man selbst einen Computer hat, kann das auch am eigenen Computer machen
- Ich mich dann zu Hause bei meinen Computer besser auskenne
- Es viele Vorteile hat: z. B. man muss die Symmetrieachse nicht selber konstruieren
- Man mehr zusammenarbeiten muss. Man kann auch mehr ausprobieren
- Man viel ausprobieren kann und weil Computer super ist. Und weil man mehr zusammenarbeiten muss
- Man's am Computer leichter kapiert, und wenn man's am Computer kapiert, kapiert man's überhaupt
- Ich mir alles gut vorstellen kann und selbst etwas ohne Heft machen kann
- Es interessant ist mit Computer zu arbeiten
- Ich kann besser zeichnen und noch leicht verstehen

Ich konstruiere lieber mit Zirkel und Lineal, weil ...

- Ich mich damit besser auskenne
- Ich damit genauer zeichnen kann und wenn es falsch ist ausradieren kann und nicht neu beginnen muss
- Man lernt es selber zu zeichnen, man kann es auch ohne Computer zeichnen
- Ich der „Wirklichkeit“ verbunden bin
- Weil dann genau weiß, wie man das zeichnet, aber man kann die Winkel nicht wirklich genau zeichnen
- Ich es selber machen kann. Ich weiß, wie ich es konstruiere
- Ich mich besser auskenne. Es ist leichter
- Ich auch die Arbeitsschritte lernen kann, was bei dem Computer nicht möglich ist.
- Ich Geometrie besonders gern habe

4 Resümee

Unterstützt mich die Arbeit mit Cabri, Schülern einen besonderen Zugang zu geometrischen Inhalten zu vermitteln und Verständnis für Zusammenhänge zu wecken? Dieser Frage bin ich in meiner Studie zum Einsatz des Computers im Geometrieunterricht nachgegangen.

Ausgangspunkt dieser Arbeit war einerseits mein Wunsch, endlich den Computer im Mathematikunterricht einzusetzen, andererseits meine Unzufriedenheit mit meinem bisherigen Geometrieunterricht, denn hier standen einzelne Konstruktionsverfahren im Vordergrund der Arbeit. Meine Begründungsversuche, warum eine Symmetrale so zu konstruieren sei, stießen bei meinen Schülern auf wenig Interesse. Um hier entgegenzuwirken habe ich in diesem Schuljahr ein anderes Konzept ausprobiert: ausgehend vom Phänomen der Symmetrie sollten die Schüler Eigenschaften solcher Abbildungen untersuchen, um in weiteren Schritten dann Schlüsse zu ziehen, wie sie mit Zirkel und Lineal an einer gegebenen Achse spiegeln bzw. die Symmetralen konstruieren können.

4.1 Welche Möglichkeiten der DGS unterstützen mich bei meiner Arbeit?

Von den drei typischen Fähigkeiten moderner Geometrieprogramme (Zugmodus, Makros, Zeichnen von Ortslinien) habe ich in meinem Unterricht den Zugmodus am häufigsten eingesetzt.

4.1.1 Der Zugmodus im Einsatz

Dieser Modus erlaubt es, eine Fülle von Anschauungsmaterial bereitzustellen und Auswirkungen veränderter Voraussetzungen zu beobachten. In vielen Arbeitsblättern ging es darum, eine bestimmte Figur zu verändern. So sollten die Schüler in „Spiegeln mit Spur“ die Lage eines Punktes bezüglich einer gegebenen Geraden verändern, und die Bewegung des durch das Programm konstruierten Spiegelpunktes beobachten²⁴.

In der zweiten Datei „Lage der Punkte“ sollten die Schüler feststellen, welcher Punkt des Fünfecks ABCDE welchem Punkt des gespiegelten Fünfecks zugeordnet war und diese Punkte entsprechend beschriften. In diesem Fall erleichtert der Zugmodus das Finden der Antwort, denn wenn ein Eckpunkt des ersten Fünfecks verschoben wird, bleiben die anderen Punkte an ihrem Platz. Nur der gespiegelte Punkt bewegt sich ebenfalls.

Auch in den Dateien zur Strecken- bzw. Winkelsymmetrale wurden Figuren durch den Zugmodus verändert: in der Datei „gespiegelter Kreis“²⁵ wurde die Größe des gezeichneten Kreises und damit auch die Größe des gespiegelten Kreises durch Ziehen mit der Maus verändert. In der Datei „Streckensymmetrale“ wurde ein Punkt auf der Symmetrale verschoben und sein Abstand zu einem Punkt einerseits und zu dessen Spiegelbild andererseits gemessen..

In allen diesen genannten Beispielen ging es um die Veränderung einer Figur, Veränderung der Größe oder um die Veränderung der Lage bezüglich einer Achse. Die Schüler hatten bei diesen Aufgaben zu beobachten, welche Beziehungen trotz der Veränderungen erhalten blieben. So veränderten sich z. B. im letzten Beispiel die Längen der Strecke SP und SP', aber die beiden Strecken waren immer gleich lang, egal welcher Punkt der Symmetralen mit S bezeichnet war.

²⁴ Bei dieser Aufgabe kam als einziges Mal die dritte Fähigkeit: Ortslinien zeichnen (Spurmodus) zum Einsatz.

²⁵ vgl. Arbeitsblatt „Streckensymmetrale“ A10 S 30

4.1.2 Messen und Konstruieren mit Cabri

Bei einigen Aufgaben sollten die Schüler die Längen von Strecken messen²⁶, bei manchen Aufgaben verwendeten sie das entsprechende Tool selbstständig, ohne von mir dazu aufgefordert worden zu sein (vgl. Lisa und Babsi, Darija). Hier war interessant zu beobachten, dass einige Schüler zunächst versuchten, die Strecken und Winkel, die am Bildschirm zu sehen waren, mit ihrem Geodreieck zu messen. Sie haben diese Versuche schnell aufgegeben, denn sobald die Bildschirmeinstellung verändert wurde, waren ihre Bemühung um „richtige“ Ergebnisse zunichte gemacht.

Nicht nur Längen- und Winkelmaße können auf Knopfdruck angezeigt werden, auch Mittelpunkte von Strecken, Normale, Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende. Dass die Geraden anders als in unseren Schulbüchern bezeichnet werden, hat den Schülern keine Schwierigkeiten bereitet.

Den Befehl „Geradenspiegelung“ habe ich am häufigsten bei der Vorbereitung der Dateien verwendet, wobei ich einmal die Gerade, an der gespiegelt wurde, ausgeblendet habe.²⁷ Nur in der Datei „Winkelsymmetrale“ kam dieser Befehl nicht zum Einsatz. So konnte ich den Schülern immer Unterlagen zur Verfügung stellen, in denen eine Figur gespiegelt war oder in der sie zur Kontrolle eine Figur an einer Geraden spiegeln sollten (vgl. „Spiegeln nach Augenmaß“).

Diese Möglichkeit, den Schülern fertige Konstruktionen von Spiegelungen als Anschauungsmaterial zur Verfügung stellen zu können, an denen sie durch einfaches Verändern der Figuren verschiedene Beobachtungen anstellen konnten, war für mein Unterrichtskonzept von größter Bedeutung. „Wie muss ich konstruieren“ war die Frage, auf die alle Arbeit zielte, aber nicht als „was muss ich tun“ – Frage! Die Intention dieser Frage ist sicher besser getroffen, wenn ich sie folgendermaßen formuliere: Welche Eigenschaften besitzen achsensymmetrischer Figuren, die ich entsprechend beachten und nutzen muss, wenn ich die Symmetrale einer Strecke mit Zirkel und Lineal konstruieren möchte?

Durch die verschiedenen Fähigkeiten und Werkzeuge des Programms konnte ich meinen Schülern einen anderen Zugang geometrischen Inhalten zeigen: vom Phänomen zur Konstruktion.

4.1.3 Unterrichten mit Cabri

Dem Einsatz des PCs verdanke ich nicht nur ein leichteres Umsetzen eines „anderen“ Unterrichtskonzepts. Auch die Arbeit mit den Schülern wurde durch den Einsatz des PCs wesentlich verändert. In diesen Stunden bin ich öfter hinter meinen Schülern gestanden, um mit ihnen gemeinsam auf den Bildschirm und die dort dargestellten Inhalte zu blicken. In den Gesprächen mit den Schülern konnte ich eher auf Missverständnisse und mathematische Fragen eingehen als im üblichen Schulalltag. Ähnliches könnte wahrscheinlich auch durch einen intensiveren Einsatz des Schulbuches erreicht werden. Wenn ich als Lehrerin nicht „Informationsquelle“ bin, kann ich meine Schüler besser bei ihren Lernwegen beobachten und unterstützend eingreifen.

²⁶ vgl. Arbeitsblatt „Strecken und Winkelsymmetrale“ A11 S 31

²⁷ vgl. „Wo liegt die Spiegelachse“ A8 S 29

4.2 die Arbeit der Schüler und ihre Leistungen

Aus der Art und Weise, wie meine Schüler an den Geräten gearbeitet haben, kann ich schließen, dass sie sich meist intensiv und vor allem selbsttätig mit den vorgegebenen Inhalten beschäftigt haben.

4.2.1 Zu welchen Leistungen und Ergebnissen gelangen meine Schüler?

Die Leistungen meiner Schüler konnte ich einerseits an den Ergebnissen, die am Ende jeder Stunde zu speichern waren, und aus den Schularbeitsergebnissen ablesen, andererseits aus den Unterrichtsgesprächen, die wir in den beiden letzten Stunden vor der Schularbeit, in denen nicht am Computer gearbeitet wurde, geführt haben.

Auch wenn bei manchen Antworten, die Schüler bei der Schularbeit geschrieben haben, noch große Mängel in der Formulierung festzustellen sind, so bin ich doch über die Tatsache sehr erfreut, dass sie solche Antworten, die sie nicht auswendig lernen konnten, überhaupt gegeben haben. Wir konnten, vielmehr als ich das in meinem bisherigen (Geometrie-)Unterricht feststellen konnte, über mathematische Inhalte sprechen und Begründungen diskutieren. Fast nebenbei lernten die Schüler, wie sie Symmetralen mit Zirkel und Lineal konstruieren. Während zu Beginn unserer Arbeit, als sie eine Figur an einer Geraden zu spiegeln hatten, häufig Fehler auftraten, sind die Schüler im weiteren Verlauf des Unterrichts sicherer geworden und immer öfter zu richtigen Ergebnissen gekommen.

4.2.2 Welche Schwierigkeiten traten auf?

Hier sind sicher die Fehler zu nennen, die in den ersten Stunden dieser Sequenz aufgetreten sind. Dazu möchte ich ein Zitat von H. W. Heymann anführen, der in Allgemeinbildung und Mathematik zu Stärkung des Schüler-Ichs schreibt: *„Und für Schüler ist es oft hilfreicher, wenn sie sich – unterstützt vom Lehrer oder von Mitschülern – auf ihre eigenen Fehler einen Reim machen können, als dass ihnen jemand die „richtige“ Lösung vormacht. Ein anderer Umgang mit Schülerfehlern setzt ein anderes Bild vom Lernprozess voraus: Mathematik ist etwas, das jedes Individuum für sich neu konstruieren muss, und nicht ein fertiges Gefüge objektiven Wissens, das lediglich von außen in die Köpfe hineinzubringen ist. Erfahren das Schüler auch im alltäglichen Mathematikunterricht immer wieder, wird ihre Leistungsfähigkeit zwar nicht automatisch wachsen, doch es besteht die Chance, dass die so häufig erlebten Gefühle des Versagens und der Demütigung einem realistischeren Umgang mit den eigenen Schwächen weichen, dass mehr Mut zum eigenen Denken entwickelt wird und sich schließlich auch mehr Erfolgserlebnisse einstellen: Stärkung des Schüler-Ichs.“*²⁸

Mit ihren eigenen „Fehlern“ wurden die Schüler bei einer der ersten Aufgaben zur Achsen Spiegelung konfrontiert (Spiegeln nach Augenmaß). Hier war ihr Wissen über die Spiegelung noch zu wenig entwickelt, um zu korrekten Ergebnissen zu gelangen. Jeder aber verstand, dass weiteres Forschen und Lernen unumgänglich war. So wurden diese Fehler zu wichtigen Rückmeldungen im Lernprozess, um notwendige Korrekturen durchführen zu können.

Auch hier hat der Computer wertvolle Dienste geleistet: Ob eine Figur richtig gespiegelt wurde, ob die Symmetrale richtig konstruiert wurde, konnten die Schüler mit Hilfe des Programms selbst überprüfen. Wenn es nicht nach Wunsch geklappt hat, wurde ich zur Hilfe gerufen – statt einer beurteilenden Rolle konnte ich eine unterstützende übernehmen.

Ein weiteres Phänomen, das mir bei den ersten Konstruktionen von Geradenspiegelungen mit Zirkel und Lineal aufgefallen ist, möchte ich hier hervorheben. Wie ich schon auf S12 be-

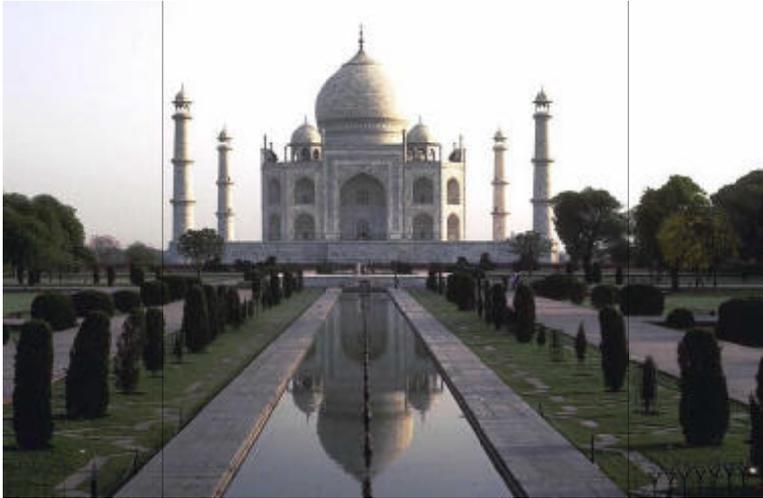
²⁸ H. W. Heymann, Allgemeinbildung und Mathematik, Weinheim u. Basel 1996, S 260 f

schrieben habe, konnten die meisten Schüler zwar alle Fragen zu den Besonderheiten der Verbindungsstrecken von Punkt und Bildpunkt richtig beantworten, die entsprechenden Handlungen aber nicht korrekt durchführen. Auch die Fehler, die bei der Hausübung aufgetreten sind (Die Diagonalen des Rechtecks wurden als Symmetralen eingezeichnet), führen mich zu dem Schluss, dass ich den Schülern öfter als bisher Möglichkeiten einräumen muss, ihr „theoretisches“ Wissen in der Praxis zu erproben. Mit richtigen Antworten allein darf ich mich nicht mehr zufrieden geben, denn sie sind kein Garant dafür, dass die Schüler ein der Sache angemessenes Verständnis und Wissen erworben haben.

So möchte ich mit einer sehr kurzen Reflexion über meine Arbeit und ihre „Unzulänglichkeiten“ schließen: Dass die Arbeitsblätter und Aufgabenstellungen noch zu verbessern und erweitern sind, ist eine weitere lehrreiche Erfahrung aus dieser Studie. So fehlen z. B. Aufgaben, bei denen die Schüler überprüfen müssen, ob die Darstellungen Fehler enthalten oder nicht und wenn ja, worin diese Fehler bestehen. Ob der Aufbau der Unterrichtssequenz der Zielsetzung entspricht, ob nicht eine Veränderung in der Reihenfolge mancher Schritte – ich denke hier vor allem an die Aufgaben zur Streckensymmetrale – sinnvoll wäre, ob nicht manches gerafft, manche charakteristischen Eigenschaften der Spiegelung viel pointierter hervorgehoben werden müssten, sollte Gegenstand weiterer Überlegungen sein.

Anhang

A1 Beispiele symmetrischer Figuren



Rätsel der Menschheit: Vergessene Weltwunder Taj Mahal

A2 Achsensymmetrie (Auszug aus dem Arbeitsblatt)

Ganz schön regelmäßig

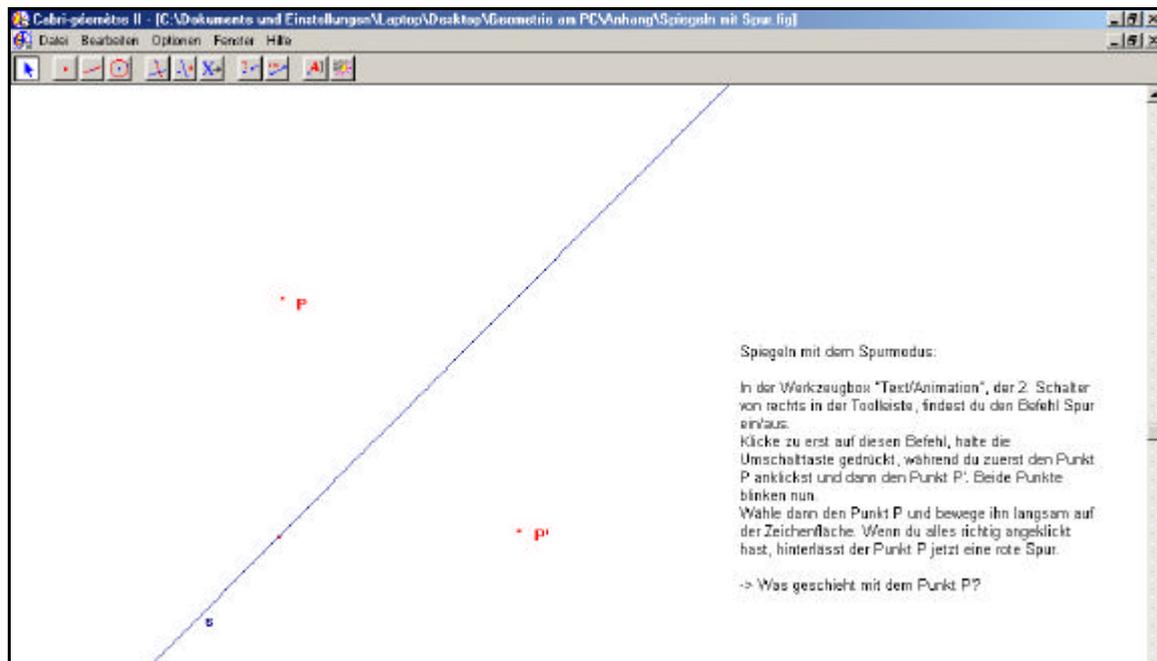
Symmetrie ist überall! Tiere und Pflanzen haben oft gleichmäßige Formen und Muster. Regelmäßige Formen kannst du auch in Kunst und Technik beobachten.

Beschreibe bei den Bildern²⁹, welche „Regelmäßigkeiten“ dir auffallen



²⁹ aus Mathematik Neue Wege 6, Arbeitsbuch für Gymnasien, Hannover 2001, S120

A3 Spiegeln mit Spur



Spiegeln mit dem Spurmodus:

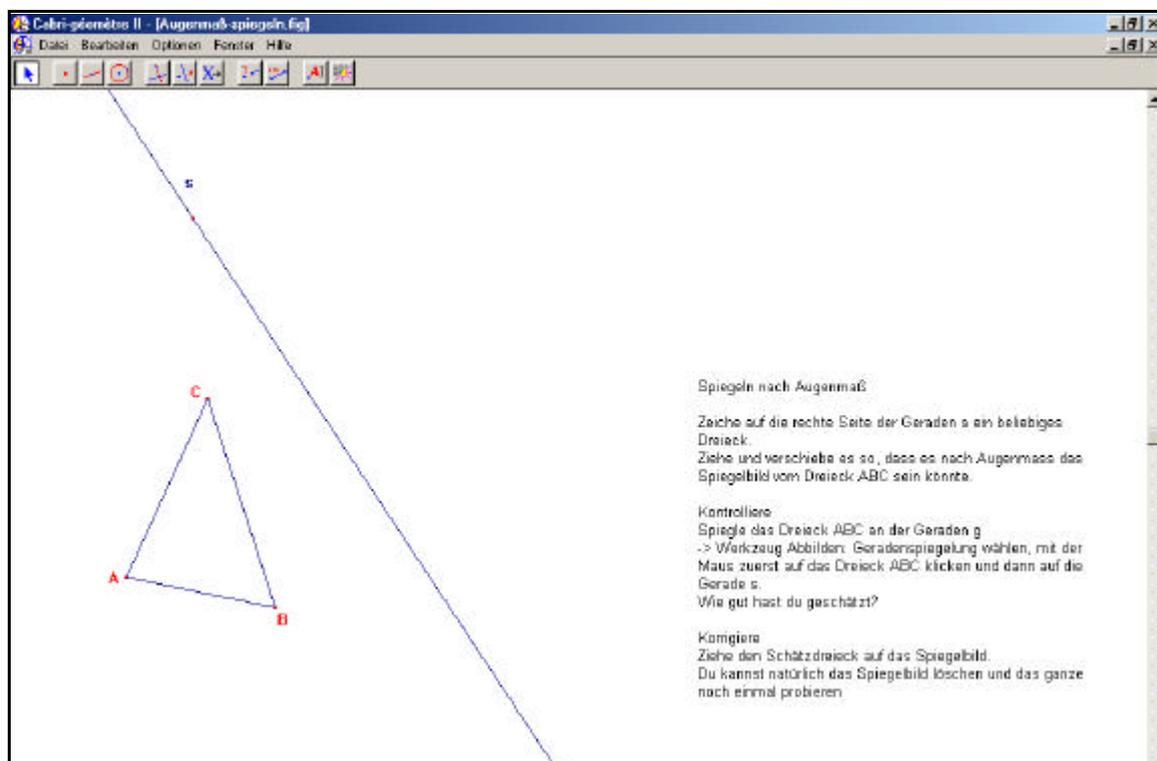
In der Werkzeugbox "Text/Animation", der 2. Schalter von rechts in der Toolliste, findest du den Befehl Spur einwärts.

Klicke zu erst auf diesen Befehl, halte die Umschalttaste gedrückt, während du zuerst den Punkt P anklickst und dann den Punkt P'. Beide Punkte blinken nun.

Wähle dann den Punkt P und bewege ihn langsam auf der Zeichenfläche. Wenn du alles richtig angeklickt hast, hinterlässt der Punkt P jetzt eine rote Spur.

-> Was geschieht mit dem Punkt P?

A4 Spiegeln nach Augenmaß



Spiegeln nach Augenmaß

Zeichne auf die rechte Seite der Geraden s ein beliebiges Dreieck.

Ziehe und verschiebe es so, dass es nach Augenmass das Spiegelbild vom Dreieck ABC sein könnte.

Kontrolliere

Spiegle das Dreieck ABC an der Geraden g

-> Werkzeug Abbildern: Geraden Spiegelung wählen, mit der Maus zuerst auf das Dreieck ABC klicken und dann auf die Gerade s.

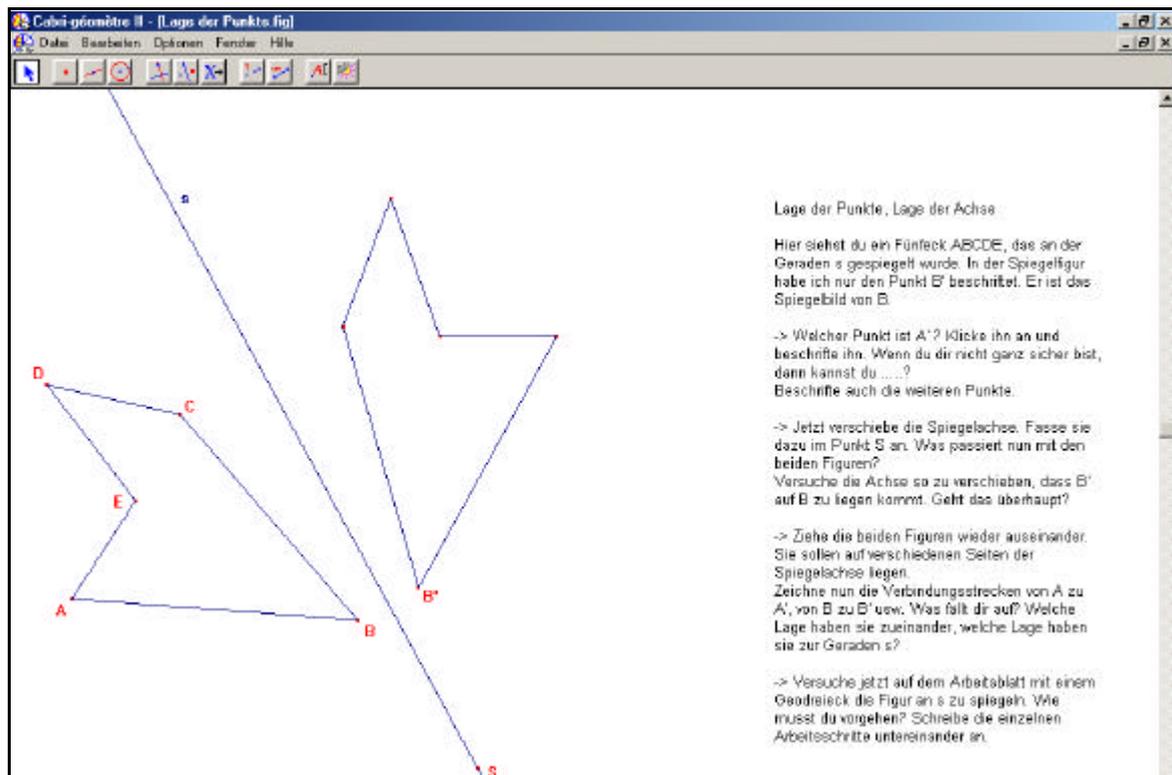
Wie gut hast du geschätzt?

Kompliere

Ziehe den Schätzdreieck auf das Spiegelbild.

Du kannst natürlich das Spiegelbild löschen und das ganze noch einmal probieren.

A5 Lage der Punkte



Lage der Punkte, Lage der Achse

Hier siehst du ein Fünfeck ABCDE, das an der Geraden s gespiegelt wurde. In der Spiegelfigur habe ich nur den Punkt B' beschriftet. Er ist das Spiegelbild von B .

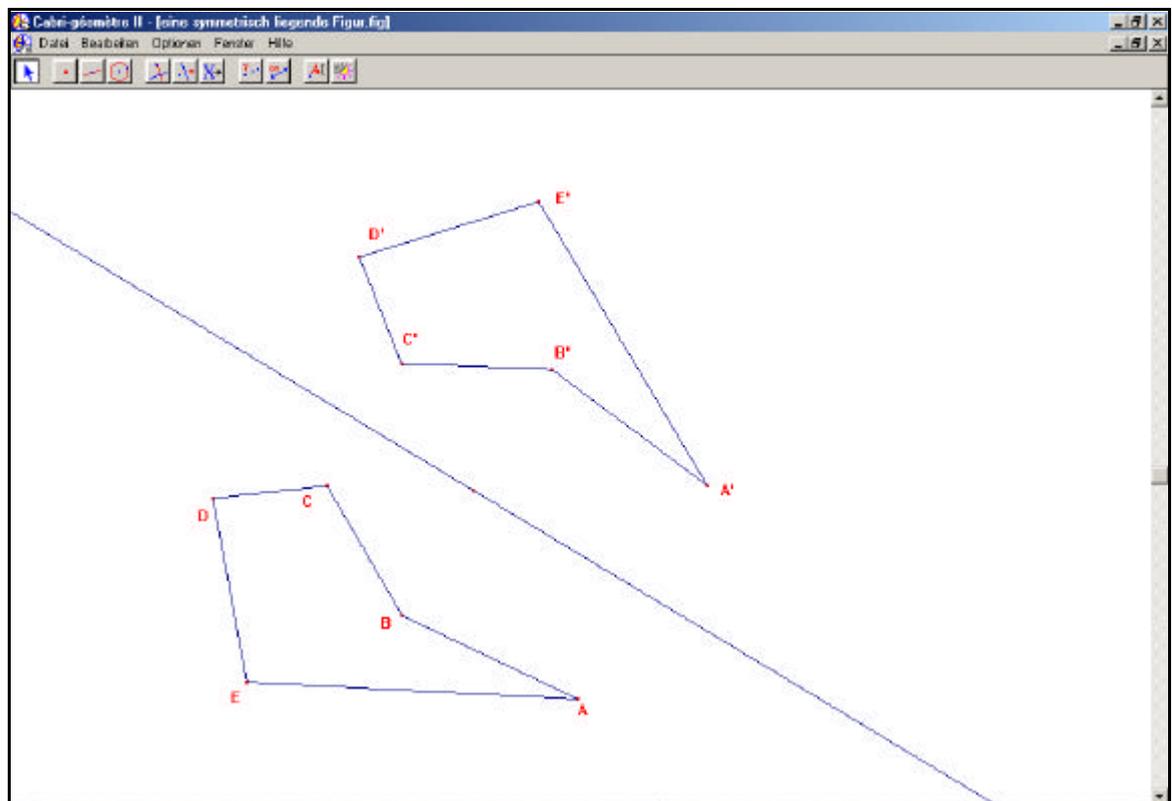
-> Welcher Punkt ist A' ? Klicke ihn an und beschrifte ihn. Wenn du dir nicht ganz sicher bist, dann kannst du?
Beschrifte auch die weiteren Punkte.

-> Jetzt verschiebe die Spiegelachse. Fasse sie dazu im Punkt S an. Was passiert nun mit den beiden Figuren?
Versuche die Achse so zu verschieben, dass B' auf B zu liegen kommt. Geht das überhaupt?

-> Ziehe die beiden Figuren wieder auseinander. Sie sollen auf verschiedenen Seiten der Spiegelachse liegen. Zeichne nun die Verbindungsstrecken von A zu A' , von B zu B' usw. Was fällt dir auf? Welche Lage haben sie zueinander, welche Lage haben sie zur Geraden s ?

-> Versuche jetzt auf dem Arbeitsblatt mit einem Geodreieck die Figur an s zu spiegeln. Wie musst du vorgehen? Schreibe die einzelnen Arbeitsschritte untereinander an.

A6 Eine symmetrisch liegende Figur



A7 Eine symmetrisch liegende Figur (Arbeitsblatt)

Öffne die Datei „eine symmetrisch liegende Figur“. Du siehst ein Fünfeck und sein Spiegelbild. Überprüfe schnell, ob das Fünfeck wirklich gespiegelt ist. Am schnellsten bist du, wenn du einen Eckpunkt ziehst. Bewegt sich der entsprechende Punkt des Spiegelbildes, dann kannst du sicher sein, dass die beiden Figuren symmetrisch zur Spiegelachse liegen.

Verbinde nun entsprechende Punkte: A mit A', B mit B' usw. durch Strecken. Jede dieser Strecken schneidet die Spiegelachse. Was kannst du über diese Schnittpunkte aussagen?

Welchen Winkel schließen diese Strecken mit der Spiegelachse ein?

Der Schnittpunkt

Die Verbindungsstrecke von einem Punkt P zum Bildpunkt P' schließt mit der Symmetrieachse

Wo liegt die Spiegelachse?

Öffne die Datei „Wo liegt die Spiegelachse?“ Du kannst hier wieder versuchen, auszuprobieren, ob du eine Gerade zeichnen kannst, an der die Figur ABCDE gespiegelt wurde. Auch hier kannst du wieder kontrollieren, indem du das Fünfeck an deiner Geraden spiegelst.

ABER: Wenn du allerdings eine genaue Lösung zeichnen willst, und das ist das Ziel unserer Stunde, dann überlege, wie du die Achse konstruieren kannst.

Du weißt: um eine Gerade zu zeichnen brauchst du zwei Punkte. Wie du bei der letzten

Aufgabe gesehen hast, die Spiegelachse die Verbindungsstrecken zusammengehörender Punkte (A,A' oder B,B' usw.)

Damit die Aufgabe nicht zu schwierig ist, habe ich die zusammengehörenden Punkte mit dem gleichen Buchstaben beschriftet, A' gehört zu A, B' zu B usw.

-> Konstruiere mindestens 2 Punkte, die auf der Spiegelachse liegen.

(Vielleicht hilft dir bei der Konstruktion am PC das Arbeitsblatt "Konstruieren mit Cabri" weiter)

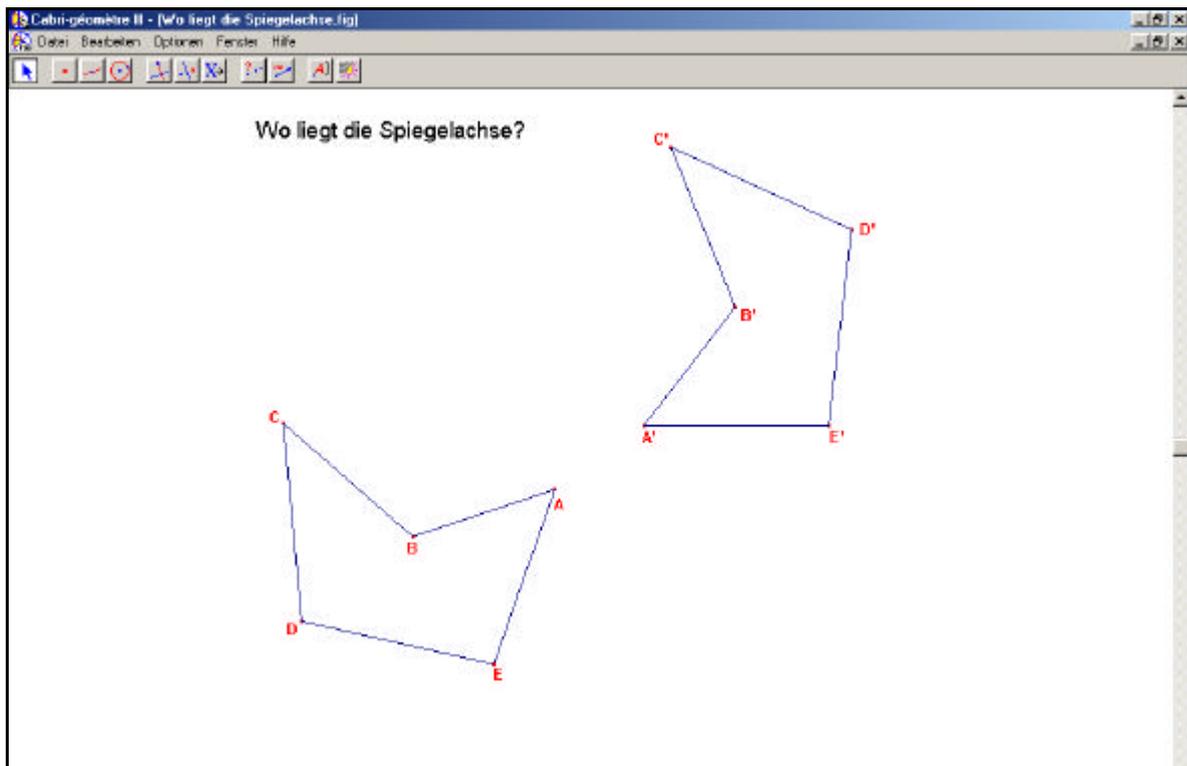
Kontrolliere nun dein Ergebnis

Lage der Punkte

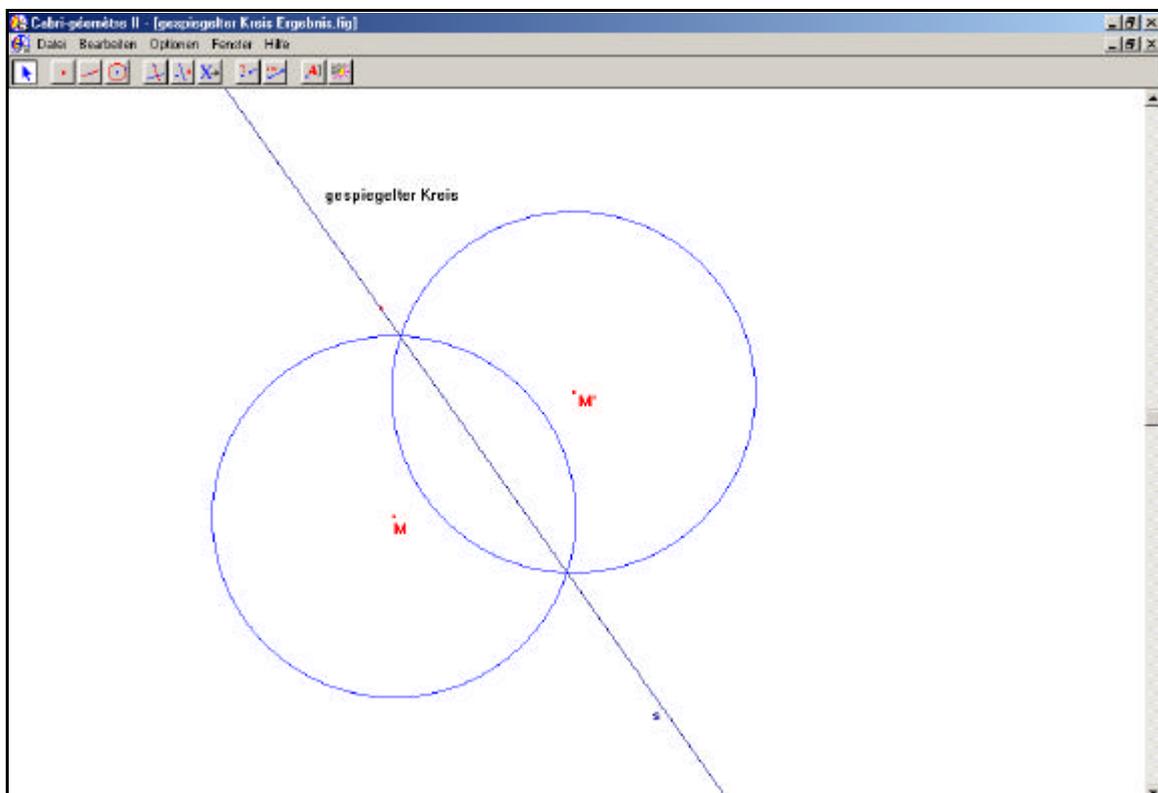
Jetzt bist du gefordert. Wenn du alle Dateien durchgearbeitet hast, hole dir das Blatt „Lage der Punkte“. Du weißt jetzt sicher, wie du mit Hilfe deines Geodreiecks die gezeichnete Figur an der Geraden s spiegeln kannst.

Notiere alle Konstruktionsschritte!

A8 Wo liegt die Spiegelachse



A9 Gespiegelter Kreis



A10 Streckensymmetrale (Arbeitsblatt)

Bearbeite die Datei „gespiegelter Kreis“ und schreibe deine Beobachtungen auf.

Zeichne um M einen Kreis, der von der Geraden s geschnitten wird.
Spiegle dann diesen Kreis an s und markiere die Schnittpunkte der beiden Kreise. Was fällt dir auf?

Verändere die Größe des ersten Kreises. Sein Spiegelbild verändert sich natürlich auch. Was gilt für die Schnittpunkte der beiden Kreise?

Was kannst du über die Größe der beiden Kreise sagen?

Öffne eine neue Datei und zeichne einen Punkt M und eine Gerade s. Mit dem Befehl <Geradenspiegelung> spiegle den Punkt an der Geraden. Zeichne jetzt um M einen Kreis mit beliebigem Radius und um sein Spiegelbild einen Kreis mit einem anderen Radius. Was gilt jetzt für die Schnittpunkte der beiden Kreise.

Verändere durch Ziehen den Radius des linken Kreises so, dass die Schnittpunkte der Kreise auf der Geraden g liegen.

Unter welcher Bedingung liegen die Schnittpunkte der beiden Kreise auf der Geraden s? (Achte auf die Radien der beiden Kreise!)

Jetzt wird es dir nicht schwer fallen, zu den beiden Punkte A und A' die Gerade s zu zeichnen. Verwende dazu deinen Zirkel und dein Geodreieck.



Die Gerade, die du soeben konstruiert hast, nennt man Streckensymmetrale der Strecke AA'.

A11 Strecken- und Winkelsymmetrale

Öffne die Datei „**Streckensymmetrale**“.

Du siehst eine Gerade s , auf der Punkte eingezeichnet sind (S, T, H, K), einen Punkt P und die Strecke von S nach P.

Spiegle diese Strecke an der Geraden s (Toolbox „Abbildungen“) und nenne den zweiten Endpunkt der gespiegelten Strecke P' . Vergleiche nun die Längen der beiden Strecken PS und $P'S$. Was fällt dir auf?

PS und $P'S$ sind

Zeichne nun die Strecke TP und TP' und miss ebenfalls die Längen dieser beiden Strecken.

Auch diese beiden Strecken

Fasse nun mit der Greifhand den Punkt S an und verschiebe ihn auf der Geraden s . Die Strecken SP und SP' wandern natürlich mit. Was gilt jeweils für ihre Längen?

Wie könnte man den folgenden Satz weiterschreiben:

Alle Punkte auf der Streckensymmetrale sind von P und P'

Öffne nun die Datei „**Winkelsymmetrale**“

Halt! Hier fehlt wieder einmal die Symmetrale, die Gerade also, die durch S geht und für die gilt: Wenn man den Punkt A an dieser Geraden spiegelt, erhält man den Punkt B.

Wie du aber aus deiner letzten Arbeit mit der Datei „Streckensymmetrale“ weißt, gilt für diese Gerade, dass alle Punkte auf ihr von A und B

Damit sind wir aber bei einer alten Aufgabe, die du schon lösen kannst! (Erinnere dich an die Aufgaben zur Datei „Wo liegt die Spiegelachse“ und „gespiegelter Kreis“)

Konstruiere die gesuchte Gerade nun mit dem PC.

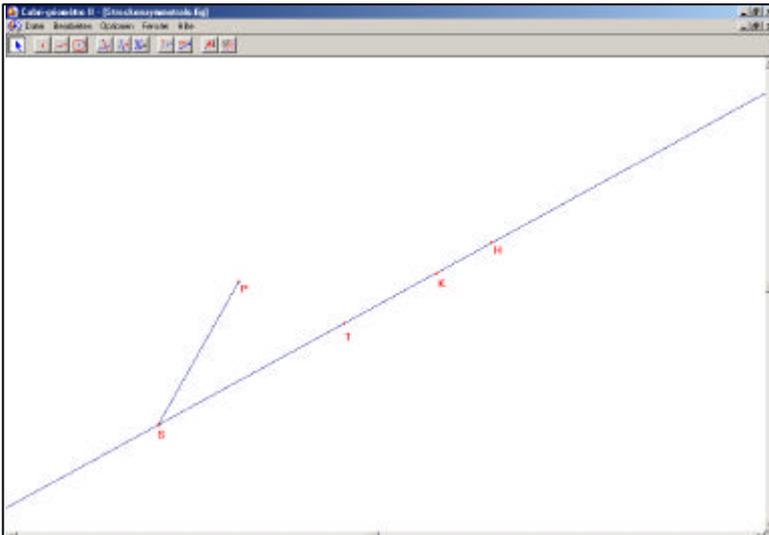
Diese Symmetrieachse halbiert den Winkel und geht durch den Scheitel S. Sie heißt daher **Winkelsymmetrale**.

Fridolin hat versucht, diese Symmetrale zu konstruieren. Das Ergebnis seiner Arbeit findest du in der Datei „**Winkelsymmetrale Wie geht das**“. Er ist mit seinem Ergebnis nicht zufrieden und überlegt: Ich habe die Punkte A und B miteinander verbunden und den Mittelpunkt der Strecke AB eingezeichnet. Wenn ich nun den Mittelpunkt M mit S verbinde, dann steht diese Gerade s nicht normal auf die Strecke AB. Die Symmetrale muss aber auf diese Strecke normal sein!

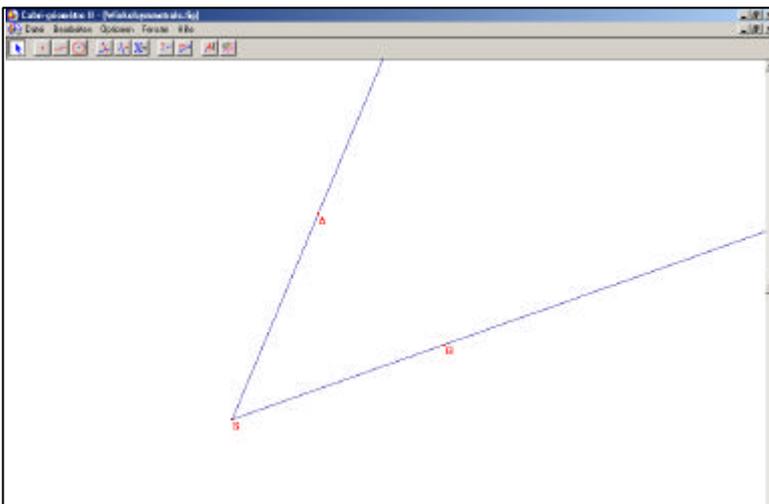
Wenn ich aber die Normale n auf die Strecke AB durch den Punkt M zeichne, geht diese Gerade nicht durch S. Erkläre, was Fridolin nicht beachtet hat.

Zeichne nun in dein Heft einen beliebigen Winkel und konstruiere die Winkelsymmetrale. Welche Arbeitsschritte waren nötig?

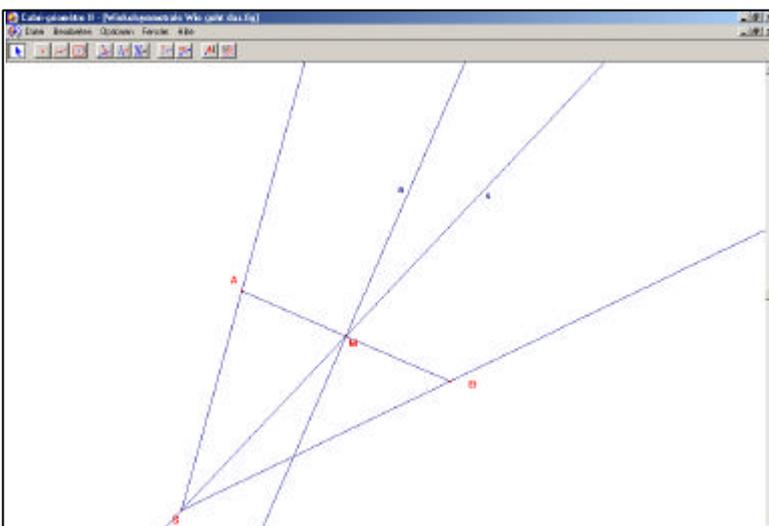
A12 Streckensymmetrale



A13 Winkelsymmetrale



A14 Winkelsymmetrale – Wie geht das?



A15 Beispiele zur Hausübung

ARBEITSBLATT

Gruppe _____



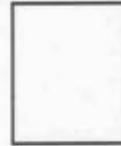
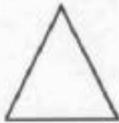
Name: _____

Klasse: _____

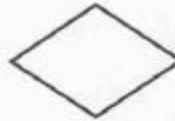
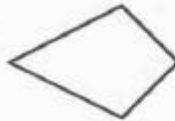
Datum: _____

1. Bestimme die Anzahl der Symmetrieachsen, zeichne sie ein.

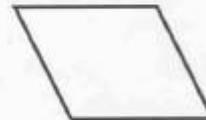
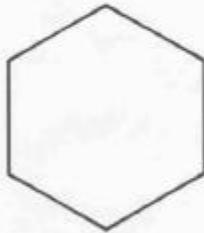
a)



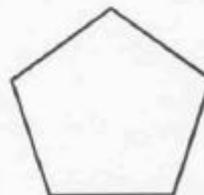
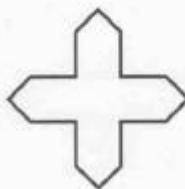
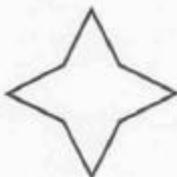
b)



c)



2. Bestimme die Anzahl der Symmetrieachsen und zeichne sie ein.



A16 Fragebogen zum Arbeiten mit dem PC

1. Ich habe zum ersten Mal mit dem Computer gearbeitet

ja nein

2. Ich habe einen Computer zu Hause

ja nein

3. Ich spiele am PC (bei Freunden oder zu Hause)

- a. jeden Tag
- b. mehrmals in der Woche
- c. manchmal
- d. nie

4. Ich habe zum ersten Mal mit einem Geometrieprogramm gearbeitet

ja nein

5. Mit dem Programm zu arbeiten war

leicht kompliziert

|-----|-----|-----|-----|-----|

6. Es hat mir gefallen, dass ich

Bei diesen Fragen trage in die Spalte die Noten 1 bis 5 ein: 1 hat mir sehr gut gefallen; 5 hat mir gar nicht gefallen.

mit einem Freund/einer Freundin zusammenarbeiten konnte	
mit der Maus schnell Figuren zeichnen konnte	
die Zeichnungen mit der Maus verändern konnte	
mit dem Spurmodus symmetrische Figuren zeichnen konnte	
die Eigenschaften symmetrischer Figuren an fertigen Zeichnungen untersuchen konnte	
aus den Zeichnungen am Bildschirm die Antworten auf die Fragen ablesen konnte	
probieren und selber entdecken konnte	
genügend Zeit hatte, eigene Ideen mit dem Programm zu verwirklichen	

7. Die Arbeitsblätter waren verständlich

sehr gar nicht

|-----|-----|-----|-----|-----|

8. Ich konnte die Fragen richtig beantworten

alle die meisten einige keine

9. Ich habe mich öfter nicht ausgekannt

stimmt stimmt nicht
|-----|-----|-----|-----|-----|

10. Mir ist es lieber, wenn mir jemand sagt, was ich machen soll

stimmt stimmt nicht
|-----|-----|-----|-----|-----|

11. Ich musste mehr tun als im normalen Mathematikunterricht

stimmt stimmt nicht
|-----|-----|-----|-----|-----|

12. Das Arbeitstempo war für mich

zu schnell angemessen zu langsam
|-----|-----|-----|-----|-----|

13. Die Aufgaben auf den Arbeitsblätter waren

zu viele zu wenig
|-----|-----|-----|-----|-----|

14. Ich finde es gut, einen Computer auch im Mathematikunterricht zu verwenden, weil...

15. Ich konstruiere lieber mit Zirkel und Lineal, weil ...

Danke für deine Mitarbeit!