

Der Differenzenquotient

- A) Die nebenstehende Tabelle ist ein Auszug aus dem Fahrplan des Expresszuges „Romulus“.

Ort	Uhrzeit		Entfernung von Villach (in km)
	an	ab	
Villach		16.13	0
Klagenfurt	16.37	16.39	38
Leoben	18.33	18.35	196
Bruck a. d. Mur	18.47	18.49	212
Wiener Neustadt	20.09	20.10	322
Wien	20.40		372

- a) Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Zuges zwischen Villach und Klagenfurt, Klagenfurt und Leoben, Leoben und Bruck a.d. Mur, Bruck a.d. Mur und Wiener Neustadt, Wiener Neustadt und Wien. In welchen dieser Streckenabschnitte fährt der Zug am schnellsten?
- b) Die Bewegung des Zuges werde durch die Zeit-Ort-Funktion $s: t \mapsto s(t)$ beschrieben. Gib eine Formel für die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}(t_1, t_2)$ des Zuges im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ an.

Ein Körper bewege sich gemäß der Zeit-Ort-Funktion $s: t \mapsto s(t)$. Man nennt

$$\bar{v}(t_1, t_2) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

die **mittlere Geschwindigkeit** des Körpers im **Zeitintervall** $[t_1, t_2]$

- B) In nebenstehender Tabelle sind die zu verschiedenen Uhrzeiten t eines Tages gemessenen Temperaturen $T(t)$ an einem bestimmten Ort angegeben.

Uhrzeit t	Temperatur $T(t)$ (°C)
8	9
10	10
12	13
14	17
16	14
18	13
20	11

- a) Berechne die Temperaturänderungen in den Zeitintervallen $[8;14]$, $[12;18]$ und $[14;20]$. Was bedeutet positives, was negatives Vorzeichen der Temperaturänderung?
- b) Gib die Temperaturänderung im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ an.
- c) Berechne die Temperaturänderungen in den Zeitintervallen $[8;12]$, $[12;14]$ und $[10;16]$. In welchem dieser Zeitintervalle ändert sich die Temperatur im Mittel am schnellsten?
- d) Gib die mittlere Temperaturänderungsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ an.

Übungen

- Ein frei fallender Körper legt nach t Sekunden ungefähr den Weg $s(t) = 5t^2$ (in Meter) zurück. Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall:
 - $[0;1]$
 - $[1;2]$
 - $[2;3]$
 - $[1;10]$
- Berechne die mittlere Änderungsrate von f im angegebenen Intervall :
 - $f: x \rightarrow 3x^2$, $[1;5]$
 - $f: x \rightarrow x^2 - x$, $[0;5]$
 - $f: x \rightarrow \frac{2}{x}$, $[-5;-2]$
 - $f: x \rightarrow 2x - 1$, $[-2;4]$
 - $f: x \rightarrow x^3$, $[2;8]$
 - $f: x \rightarrow \frac{1}{x^2}$, $[10;20]$
- Gib die mittlere Änderungsrate der Funktion f im Intervall $[u,v]$ an. Wie lautet diese mittlere Änderungsrate, wenn a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^3$?

- 4) Die nebenstehende Tabelle gibt die Anzahlen der Ehescheidungen in Österreich von 1961 bis 2001 an. Es sei $A(t)$ die Anzahl der Ehescheidungen im Jahre t .
- Berechne die mittlere Scheidungsrate in den Zeiträumen $[1961, 1971]$, $[1971, 1981]$, $[1981, 1991]$ und $[1991, 2001]$. In welchem dieser Zeiträume war die mittlere Scheidungsrate am größten?
 - Gib die Änderung der Anzahl der Ehescheidungen im Zeitraum $[a, b]$ an. Was bedeutet das Vorzeichen?
 - Gib die mittlere Scheidungsrate im Zeitraum $[a, b]$ an.

Jahr	Ehescheidungen
1961	8045
1971	10 005
1981	13 369
1991	16 391
1999	18 512
2000	19 552
2001	20 582

Das Vorzeichen des Differenzenquotienten

Ist $[a, b]$ ein Intervall, dann gilt $b - a > 0$. Damit ergibt sich folgendes:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) > 0 \Rightarrow f(a) < f(b) \quad (\text{siehe Abb.1a})$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0 \Rightarrow f(b) - f(a) < 0 \Rightarrow f(a) > f(b) \quad (\text{siehe Abb.1b})$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = 0 \Rightarrow f(a) = f(b) \quad (\text{siehe Abb.1c})$$

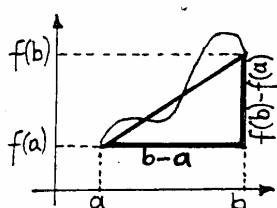


Abb.1a

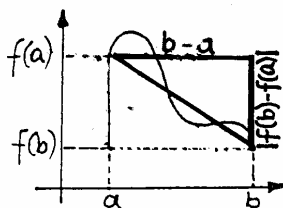


Abb.1b

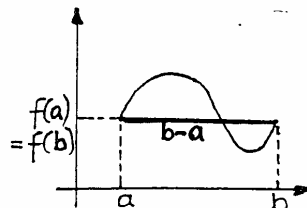


Abb.1c

Ist der Differenzenquotient von f in $[a, b]$

- positiv, so sagt man, f steigt insgesamt in $[a, b]$ bzw. f steigt im Mittel in $[a, b]$ (f muss aber nicht monoton steigend in $[a, b]$ sein),
- negativ, so sagt man, f fällt insgesamt in $[a, b]$ bzw. f fällt im Mittel in $[a, b]$ (f muss aber nicht monoton fallend in $[a, b]$ sein),
- gleich 0, so sagt bedeutet dies, dass f an den Stellen a und b den gleichen Wert annimmt (f muss aber nicht konstant in $[a, b]$ sein).

Ü) Gegeben ist die nebenstehend abgebildete Funktion f .

- In welchen der Intervalle $[0, 2]$, $[2, 5]$ und $[5, 8]$ ist der Differenzenquotient positiv, in welchen negativ, in welchen gleich 0? Beantworte diese Frage, ohne zu rechnen.
- Ermittle die Differenzenquotienten von f in diesen Intervallen.

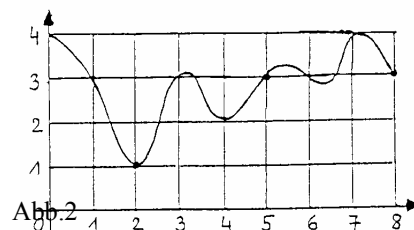


Abb.2

Der Differenzenquotient einer linearen bzw. nichtlinearen Funktion

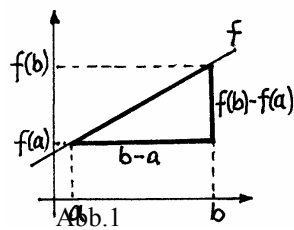


Abb.1

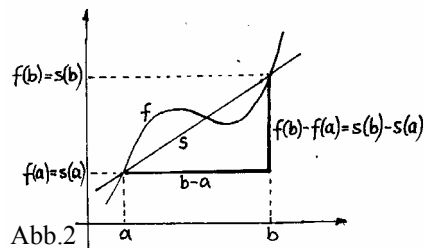


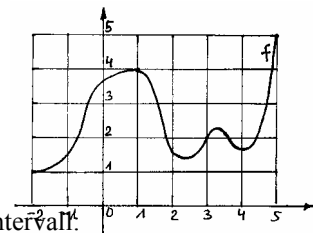
Abb.2

s Sekantenfunktion .

Übungen:

- 6) Zeichne in Abb.3 die Sekantenfunktion von f im Intervall
a) $[-2;1]$, b) $[1;3]$, c) $[3;5]$ ein. Ermittle deren Steigung
und gib eine Termdarstellung der Sekantenfunktion an.

Abb.3



- 7) Sei $f(x) = 4x^2 - 5x + 6$. Ermittle die Steigung der Sekantenfunktion von f im Intervall:
a) $[0;9]$ b) $[3; 11]$ c) $[10;100]$ d) $[100;110]$

Deutungen des Differenzenquotienten

Deutungen des Differenzenquotienten (der mittlere Änderungsrate)

Differenzenquotient als Verhältnis: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente in $[a,b]$

Differenzenquotient als mittlere Änderung pro Einheit: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist gleich der mittleren Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit in $[a,b]$

Differenzenquotient als Faktor: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist gleich dem Faktor, mit dem die Änderung der Argumente in $[a,b]$ multipliziert werden muss, um die Änderung der Funktionswerte in $[a,b]$ zu erhalten.

- 8) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2$. In welchem Verhältnis steht die Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente im Intervall:
a) $[1;2]$ b) $[0;10]$ c) $[50;100]$ d) $[u,v]$
- 9) Ein frei fallender Körper legt in t Sekunden ungefähr den Weg $s(t) = 5t^2$ (in m) zurück. Wie groß ist die mittlere Wegzunahme pro Sekunde im Intervall:
a) $[0;2]$ b) $[1;5]$ c) $[8;15]$ d) $[20;25]$
- 26 Ein frei fallender Körper hat nach t Sekunden ungefähr die Geschwindigkeit $v(t) = 10t$ (in m/s). Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeitszunahme pro Sekunde (d.h. die mittlere Beschleunigung) im Intervall:
a) $[0;5]$ b) $[0;10]$ c) $[0;20]$ d) $[10;20]$

- 27** Ein kugelförmiger Ballon mit dem Radius r hat das Volumen $V(r) = \frac{4\pi}{3} r^3$. Wie groß ist die mittlere Volumszunahme pro cm Radius, wenn der Ballon
- a) vom Radius 5 cm auf den Radius 10 cm,
 - b) vom Radius 10 cm auf den Radius 15 cm,
 - a) vom Radius 15 cm auf den Radius 20 cm aufgeblasen wird?
- 28** Ein kugelförmiger Ballon mit dem Radius r hat den Oberflächeninhalt $O(r) = 4\pi r^2$. Wie groß ist die mittlere Oberflächenzunahme pro cm Radius, wenn der Ballon
- a) vom Radius 1 cm auf den Radius 20 cm,
 - b) vom Radius 15 cm auf den Radius 30 cm,
 - c) vom Radius 1 cm auf den Radius 30 cm aufgeblasen wird?
- 29** Gegeben ist die folgende monoton wachsende Funktion f . Wie viel mal stärker wächst $f(x)$ als x , wenn x von x_1 auf x_2 wächst?
- a) $f(x) = x$, $x_1=1$, $x_2=4$
 - c) $f(x) = x^2$, $x_1=0$, $x_2=10$
 - b) $f(x) = 2x$, $x_1=1$, $x_2=4$
 - d) $f(x) = 2^x$, $x_1=0$, $x_2=10$
- 30** Berechne den Differenzenquotient der Funktion f im angegebenen Intervall und deute das Ergebnis auf drei verschiedene Arten:
- a) $f(x) = x^4+1$, $[0;10]$
 - b) $f(x) = 1-x^2$, $[2;5]$
 - c) $f(x) = x^2-x+1$, $[2;8]$
 - d) $f(x) = -2x^3$, $[1;100]$