

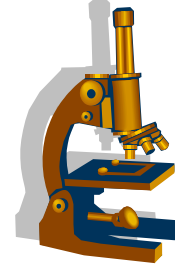
1.1 Exponentialfunktionen

In diesem Abschnitt lernen wir einen Typ von Funktionen kennen, mit dem man viele Wachstums- und Abnahmevorgänge beschreiben kann.

1.01 Die Beobachtung einer Bakterienkultur auf einer Nährlösung ergibt:

Zu Beginn nehmen die Bakterien eine Fläche von 1000 mm^2 ein, die Fläche vergrößert sich pro Stunde um ca. 45%. Es sei $A(n)$ der Inhalt dieser Fläche nach n Stunden.

- Berechne $A(n)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und stelle eine Formel für $A(n)$ auf.
- Zeichne den Graphen der Funktion A , die jedem Zeitpunkt n den Flächeninhalt $A(n)$ der Bakterienkultur zuordnet.



Lösung:

- Wird eine Größe G um 45% vergrößert, so wächst sie auf folgenden Betrag an:

$$G + 45\% \text{ von } G = G + \frac{45}{100} \cdot G = G + 0,45 \cdot G = 1,45 \cdot G$$

Somit erhalten wir:

$$A(0) = 1000$$

$$A(1) = A(0) \cdot 1,45 = 1000 \cdot 1,45 = 1450$$

$$A(2) = A(1) \cdot 1,45 = (1000 \cdot 1,45) \cdot 1,45 = 1000 \cdot 1,45^2 \approx 2100$$

$$A(3) = A(2) \cdot 1,45 = (1000 \cdot 1,45^2) \cdot 1,45 = 1000 \cdot 1,45^3 \approx 3050$$

$$A(4) = A(3) \cdot 1,45 = (1000 \cdot 1,45^3) \cdot 1,45 = 1000 \cdot 1,45^4 \approx 4421$$

$$A(5) = A(4) \cdot 1,45 = (1000 \cdot 1,45^4) \cdot 1,45 = 1000 \cdot 1,45^5 \approx 6410$$

$$A(n) = 1000 \cdot 1,45^n$$

- Der Graph der Funktion A mit $A(n) = 1000 \cdot 1,45^n$ ist in Abb.1 dargestellt.

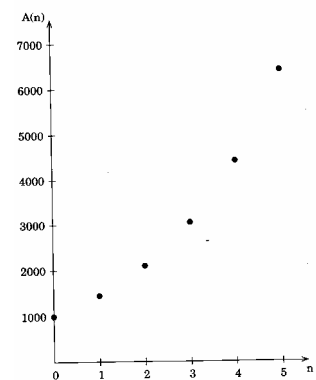


Abb.1

Dürfen wir die Punkte in Abb.1 durch eine ununterbrochene Linie verbinden? Genau genommen nicht, da wir die Formel $A(n) = 1000 \cdot 1,45^n$ nur für natürliche n hergeleitet haben. Es liegt aber die Vermutung nahe, dass für beliebige (auch nicht natürliche) Zeitpunkte t gilt:

$$A(t) = 1000 \cdot 1,45^t$$

Wir überlegen uns dies etwa für $t = \frac{1}{2}$. Da wir von der Annahme ausgegangen sind, dass sich der Flächeninhalt der Bakterienkultur in jeder Stunde mit dem Faktor 1,45 vergrößert, liegt auch die Annahme nahe, dass er sich in jeder halben Stunde mit einem konstanten Faktor q vergrößert (der natürlich kleiner als 1,45 ist). Da der Flächeninhalt in der ersten halben Stunde mit dem Faktor q und in der zweiten halben Stunde ebenfalls mit dem Faktor q wächst, wächst er insgesamt in der ersten Stunde mit dem Faktor $q \cdot q = q^2 = 1,45$. Daraus folgt $q = \sqrt{1,45} = 1,45^{\frac{1}{2}}$. Somit gilt:

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = 1000 \cdot q = 1000 \cdot 1,45^{\frac{1}{2}}$$

Wir sehen: Die Formel $A(t) = 1000 \cdot 1,45^t$ gilt für $t = \frac{1}{2}$.

Ähnliche Überlegungen kann man für andere nicht natürliche Werte von t durchführen. Allgemein lässt sich zeigen: Wenn man von der Annahme ausgeht, dass der Flächeninhalt in gleichen Zeitabschnitten jeweils mit dem gleichen Faktor wächst, dann gilt die Formel $A(t) = 1000 \cdot 1,45^t$ für beliebige Zeitpunkte t .

Das Wachstum der Bakterien kann allerdings nicht unbeschränkt erfolgen, weil den Bakterien früher oder später der Nährboden ausgeht. Wir müssen also davon ausgehen, dass die Formel $A(t) = 1000 \cdot 1,45^t$ nur für $0 \leq t \leq c$ gilt, wobei die obere Schranke c von den jeweiligen Laborbedingungen abhängt. Es liegt also folgende Funktion vor:

$$A: [0; c] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } A(t) = 1000 \cdot 1,45^t$$

Der Graph dieser Funktion ist in Abb.2 dargestellt.

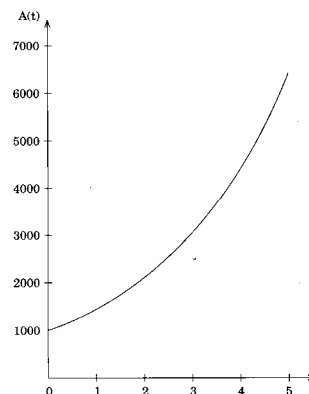


Abb.2

1.02 Die Bakterienkultur ist bereits 7000 mm^2 groß. Man stellt fest, dass durch Zugabe eines Medikaments die Bakterien absterben, wobei die Fläche in jeder Stunde um etwa 35% kleiner wird. Es sei $A(n)$ der Inhalt dieser Fläche nach n Stunden.

- Berechne $A(n)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und stelle eine Formel für $A(n)$ auf.
- Es sei $A(t)$ der Inhalt der Fläche zum Zeitpunkt t . Stelle eine Formel für $A(t)$ auf und zeichne den Graphen der Funktion $A: t \mapsto A(t)$.

Lösung:

- Wird eine Größe G um 35% vermindert, so sinkt sie auf folgenden Betrag ab:

$$G - 35\% \text{ von } G = G - \frac{35}{100} \cdot G = G - 0,35 \cdot G = 0,65 \cdot G$$

Somit erhalten wir:

$$A(0) = 7000$$

$$A(1) = A(0) \cdot 0,65 = 7000 \cdot 0,65 = 4550$$

$$A(2) = A(1) \cdot 0,65 = (7000 \cdot 0,65) \cdot 0,65 = 7000 \cdot 0,65^2 \approx 2958$$

$$A(3) = A(2) \cdot 0,65 = (7000 \cdot 0,65^2) \cdot 0,65 = 7000 \cdot 0,65^3 \approx 1922$$

$$A(4) = A(3) \cdot 0,65 = (7000 \cdot 0,65^3) \cdot 0,65 = 7000 \cdot 0,65^4 \approx 1250$$

$$A(5) = A(4) \cdot 0,65 = (7000 \cdot 0,65^4) \cdot 0,65 = 7000 \cdot 0,65^5 \approx 812$$

$$A(n) = 7000 \cdot 0,65^n$$

- Wie vorhin kann man sich überlegen: Wenn man von der Annahme ausgeht, dass der Flächeninhalt in gleichen Zeitabschnitten jeweils mit dem gleichen Faktor abnimmt, dann gilt die Formel $A(t) = 7000 \cdot 0,65^t$ für beliebige Zeitpunkte $t \in \mathbb{R}_0^+$. Es liegt also folgende Funktion vor:

$$A: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } A(t) = 7000 \cdot 0,65^t$$

Der Graph dieser Funktion ist in Abb.3 dargestellt.

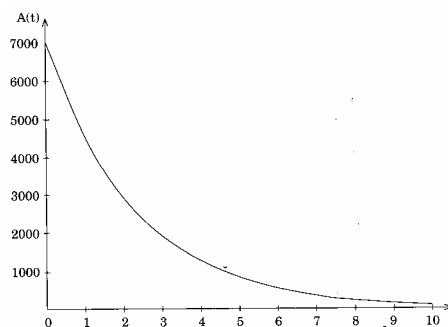


Abb.3

In den letzten beiden Aufgaben haben wir folgende Funktionen betrachtet:

$$A: [0; c] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } A(t) = 1000 \cdot 1,45^t$$

$$A: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } A(t) = 7000 \cdot 0,65^t$$

Beide Funktionen waren vom Typ:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = c \cdot a^x \text{ (wobei } A \subseteq \mathbb{R})$$

Definition: Eine reelle Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = c \cdot a^x$ ($c \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$), heißt
Exponentialfunktion

1.03 1) Warum muss bei einer Exponentialfunktion $a \geq 0$ vorausgesetzt werden?

2) Warum ist es außerdem sinnvoll, die Werte $a = 0$ und $a = 1$ auszuschließen?

Lösung:

1) Die Potenz a^x ist für $a < 0$ nicht immer definiert. Zum Beispiel ist $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ nicht definiert.

2) Für $a = 0$ ergäbe sich die konstante Funktion mit $f(x) = 0$, für $a = 1$ die konstante Funktion mit $f(x) = c$. Diese Funktionen stellen weder Wachstums- noch Abnahmeprozesse dar.

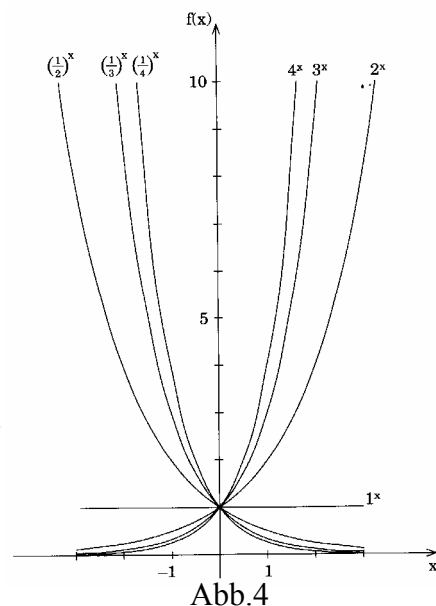
Graphen von Exponentialfunktionen

1.04 Betrachte auf einem Computer die Graphen von Exponentialfunktionen f mit $f(x) = a^x$ für verschiedene Werte von $a \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq 1$. Welche Eigenschaften der Graphen lassen sich erkennen?

Lösung: In Abb.4 sind einige Graphen dargestellt.

Man erkennt u.a.:

- Alle Graphen gehen durch den Punkt $(0/1)$.
- Ist $a > 1$, so ist f streng monoton steigend (wobei f mit zunehmendem x immer stärker steigt).
- Ist $0 < a < 1$, so ist f streng monoton fallend (wobei f mit zunehmendem x immer schwächer fällt).
- Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = a^x$ und $g(x) = (\frac{1}{a})^x$ liegen symmetrisch bezüglich der 2. Achse.



Diese Beobachtungen begründen wir in den folgenden Sätzen genauer.

Satz 1: Der Graph einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ ($a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$) geht stets durch den Punkt $(0/1)$.

Beweis: $f(0) = a^0 = 1$.

□

Satz 2: Eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ ist

- streng monoton steigend, wenn $a > 1$ ist,
- streng monoton fallend, wenn $0 < a < 1$ ist.

Beweis: Wir benutzen den Satz auf Seite

Ist $a > 1$, dann gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow a^{x_2 - x_1} > 1 \Rightarrow \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

Ist $a < 1$, dann gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow a^{x_2 - x_1} < 1 \Rightarrow \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} < 1 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \quad \square$

Satz 3: Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = a^x$ und $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ liegen symmetrisch bezüglich der 2. Achse.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $f(x) = g(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt (siehe Abb.1).

$$f(x) = a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = g(-x) \quad \square$$

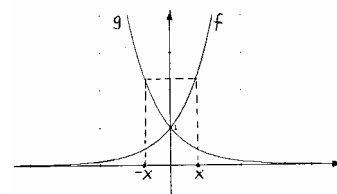
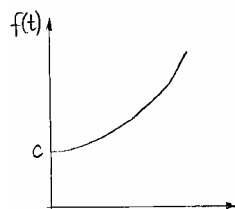


Abb.1

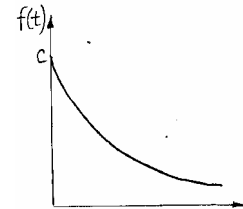
Exponentielle Wachstums- und Abnahmevorgänge

In den Anwendungen betrachtet man meist zeitliche Abhängigkeiten der Form $f(t) = c \cdot a^t$, wobei $c > 0$ und $t \geq 0$. Falls $a > 1$, liegt ein **exponentieller Wachstumsprozess** vor, falls $0 < a < 1$, liegt ein **exponentieller Abnahmeprozess** vor (siehe Aufgabe 1.0x). Wegen $f(0) = c \cdot a^0 = c$ ist c der Anfangswert dieses Prozesses (siehe Abb.5a,b). Man stellt einen solchen Prozess daher oft in der Form $f(t) = f(0) \cdot a^t$ dar. Man bezeichnet diese Gleichung als **exponentielles Wachstumsgesetz** bzw. **exponentielles Abnahmengesetz**, je nachdem, ob $a > 1$ oder $0 < a < 1$ ist.



Exponentielles Wachstum

Abb.5a:



Exponentielle Abnahme

Abb.5b:

$$f(t) = c \cdot a^t \text{ mit } c > 0 \text{ und } a > 1 \quad f(t) = c \cdot a^t \text{ mit } c > 0 \text{ und } 0 < a < 1$$

Einen wichtigen exponentiellen Abnahmeprozess stellt der **radioaktive Zerfall** dar. Beim radioaktiven Zerfall zerfallen die Atome eines radioaktiven Stoffes, d.h. sie wandeln sich (unter Aussendung von Strahlung) in Atome eines anderen Stoffes um. Die Anzahl der noch unzerfallenen Atome nimmt dabei exponentiell ab. Ist $N(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t noch unzerfallenen Atome und $N_0 = N(0)$ die Anzahl der unzerfallenen Atome zu Beginn, so gilt die folgende Formel:



Abb.6

AchtungRadioaktivität:

Radioaktives Zerfallsgesetz: $N(t) = N_0 \cdot a^t$ (mit $0 < a < 1$)

Da die Masse des noch vorhandenen radioaktiven Stoffes zur Anzahl der noch unzerfallenen Atome direkt proportional ist, gilt ein analoges Zerfallsgesetz für die Masse.

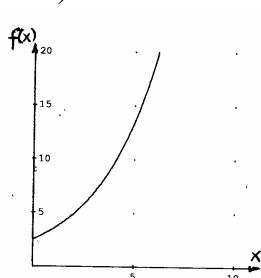
Grundaufgaben

- 1.05** Eine Stadt hat derzeit ca. 15 000 Einwohner. Die Einwohnerzahl wächst jährlich um ca. 8%. Es sei $E(n)$ die Einwohnerzahl nach n Jahren.
- Berechne $E(n)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und stelle eine Formel für $E(n)$ auf.
 - Zeichne den Graphen der Funktion $E: n \mapsto E(n)$ für $1 \leq n \leq 5$.
 - Stelle eine Formel für die Einwohnerzahl $E(t)$ zum Zeitpunkt t auf (wobei t nicht natürlich sein muss). Welche Annahme muss getroffen werden?
 - Zeichne den Graphen der Funktion $E: t \mapsto E(t)$ für $0 \leq t \leq 5$ (Computer!).
- 1.06** Eine Flüssigkeit in einem Glas hat eine Temperatur von 80°C . Das Glas wird in Eiswasser der Temperatur 0°C getaucht. Dabei kühlt sich die Flüssigkeit in dem Glas pro Minute um ca. 12% ab. Es sei $T(n)$ die Temperatur der Flüssigkeit nach n Minuten.
- Berechne $T(n)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und stelle eine Formel für $T(n)$ auf.
 - Zeichne den Graphen der Funktion $T: n \mapsto T(n)$ für $0 \leq n \leq 5$.
 - Stelle eine Formel für die Temperatur $T(t)$ der Flüssigkeit zum Zeitpunkt t auf (wobei t nicht natürlich sein muss). Welche Annahme muss getroffen werden?
 - Zeichne den Graphen der Funktion $T: t \mapsto T(t)$ für $0 \leq t \leq 5$ (Computer!).
- 1.07** Wir nehmen an, dass von einem radioaktiven Stoff zu Beginn 1 000 000 Atome vorhanden sind und die Anzahl der noch unzerfallenen Atome pro Stunde um ca. 15% abnimmt. Es sei $N(n)$ die Anzahl der noch unzerfallenen Atome nach n Stunden.
- Berechne $E(n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ und zeichne den Graphen der Funktion $N: n \mapsto N(n)$.
 - Welche Annahme muss getroffen werden, damit man die Punkte in dem Graphen durch eine ununterbrochene Linie verbinden darf? Gib das Zerfallsgesetz an und zeichne den Graphen der Funktion $N: t \mapsto N(t)$ (Computer!).
- 1.08** Eine bestimmte Menge des radioaktiven Elementes Polonium 218 zerfällt annähernd nach dem Zerfallsgesetz $N(t) = 1\,500\,000 \cdot 0,83445^t$ (t in Tagen).
- Wie viele unzerfallene Atome sind zu Beginn vorhanden?
 - Wie viele unzerfallene Atome sind nach 2, 7, 14 bzw. 30 Tagen noch vorhanden?
 - Zeichne den Graphen der Funktion $N: t \mapsto N(t)$ (Computer!).
- 1.09** In einer Bakterienkultur, in der zu Beginn der Beobachtung etwa 10 000 Bakterien vorhanden sind, teilen sich die Zellen ungefähr alle 3 Stunden.
- Berechne im Kopf, wie viele Bakterien nach 12 Stunden, nach 1 Tag und nach 2 Tagen vorhanden sind.
 - Stelle ein Wachstumsgesetz der Form $N(t) = N_0 \cdot a^t$ auf.
(Hinweis: Berechne a aus $N(3)$.)

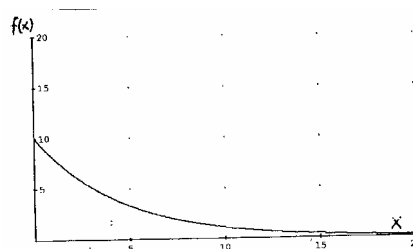
Weiterführende Aufgaben

- 1.10** In der folgenden Abbildung ist ein exponentieller Prozess dargestellt. Gib näherungsweise ein Wachstums- bzw. Abnahmegesetz an.
(Hinweis: Ermittle einen Funktionswert für $x > 0$ durch Messung und berechne daraus die Basis a .)

a)



b)



1.12 Betrachte auf einem Computer die Graphen von Exponentialfunktionen f mit $f(x) = c \cdot a^x$ ($a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$) für verschiedene Werte von $c \in \mathbb{R}$. Welche Eigenschaften der Graphen lassen sich erkennen, wenn $c > 0$ ist, welche, wenn $c < 0$ ist?

1.2 Deutungen der Zahlen c und a

In diesem Abschnitt studieren wir die Bedeutung der Zahlen c und a bei einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$.

Gegeben sei eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$. Was bedeuten die Zahlen c und a ?

Die Bedeutung von c haben wir uns schon im Abschnitt 1.1 überlegt. Aus $f(0) = c \cdot a^0 = c$ ergibt sich:

Deutung der Zahl c

Die Zahl c ist der Funktionswert von f an der Stelle 0.

Der Graph von f schneidet die zweite Achse im Punkt $(0/c)$ (siehe Abb.1a,b).

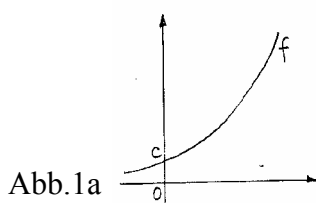


Abb.1a

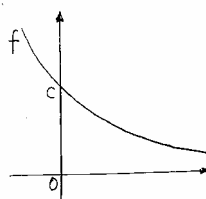


Abb.1b

Die Zahl a heißt **Basis** der Exponentialfunktion und ist ein Maß für die Stärke des Steigens bzw. Fallens der Funktion, wie wir schon im vorigen Abschnitt erkannt haben. Genauer geht aus dem folgenden Satz hervor:

Satz: Sei f eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ ($c \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$). Dann gilt für alle $h \in \mathbb{R}$:

$$(1) \quad f(x+1) = f(x) \cdot a$$

$$(2) \quad f(x+h) = f(x) \cdot a^h$$

Beweis:

$$(1) \quad f(x+1) = c \cdot a^{x+1} = c \cdot a^x \cdot a = f(x) \cdot a$$

$$(2) \quad f(x+h) = c \cdot a^{x+h} = c \cdot a^x \cdot a^h = f(x) \cdot a^h$$

□

Die Eigenschaft (1) ist ein Spezialfall der Eigenschaft (2) für $h = 1$. In Worten kann man diese beiden Eigenschaften so ausdrücken:

Deutungen der Basis a

(1) Bei Erhöhung des Arguments um 1 ändert sich der Funktionswert mit dem Faktor a .

(2) Bei Erhöhung des Arguments um h ändert sich der Funktionswert mit dem Faktor a^h .

Durch einfache Umformungen erhält man folgende Formulierungen:

$$(1) \frac{f(x+1)}{f(x)} = a \quad (2) \frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$$

In Worten:

- (1) Die Basis a ist gleich dem Verhältnis der Funktionswerte bei Erhöhung des Arguments um 1.
- (2) Die Potenz a^h ist gleich dem Verhältnis der Funktionswerte bei Erhöhung des Arguments um h .

Prozentuelle Zu- bzw. Abnahme

Ist $a > 1$, so ist auch stets $a^h > 1$ und wir können $a = 1 + \frac{p_h}{100}$ setzen. Damit geht die Gleichung $f(x+h) = f(x) \cdot a^h$ über in $f(x+h) = f(x) \cdot (1 + \frac{p_h}{100})$. Dies bedeutet eine Erhöhung von $f(x)$ um $p_h\%$.

Ist $0 < a < 1$, so ist auch stets $0 < a^h < 1$ und wir können $a = 1 - \frac{p_h}{100}$ setzen. Damit geht die Gleichung $f(x+h) = f(x) \cdot a^h$ über in $f(x+h) = f(x) \cdot (1 - \frac{p_h}{100})$. Dies bedeutet eine Verminderung von $f(x)$ um $p_h\%$.

Für Exponentialfunktionen lässt sich also insgesamt sagen:

Gleiche Zunahme der Argumente (um h) bewirkt stets eine Zu- bzw. Abnahme der Funktionswerte mit dem gleichen Faktor (a^h) bzw. um denselben Prozentsatz (p_h) vom jeweiligen Ausgangswert (siehe Abb. 2a,b).

Für $h = 1$ ergibt sich insbesondere:

Gleiche Zunahme der Argumente um 1 bewirkt stets eine Zu- bzw. Abnahme der Funktionswerte mit dem gleichen Faktor a bzw. um denselben Prozentsatz p vom Ausgangswert (siehe Abb 3a,b).

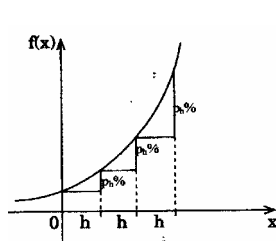


Abb.2a

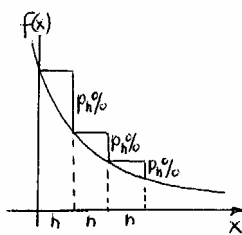


Abb.2b

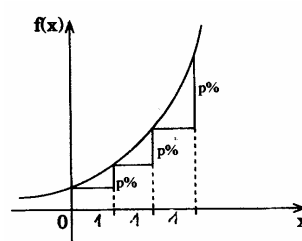


Abb.3a

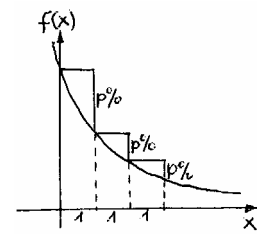


Abb.3b

Grundaufgaben

1.14 Beantworte für die folgende Funktion, ohne zu rechnen: Auf das Wievielfache wächst bzw. fällt $f(x)$, wenn x um 1 erhöht wird?

- | | | | |
|-------------------------|-------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = 2^x$ | c) $f(x) = 10 \cdot 1,5^x$ | e) $f(x) = 0,5^x$ | g) $f(x) = 100 \cdot 0,85^x$ |
| b) $f(x) = 2 \cdot 3^x$ | d) $f(x) = 3,98 \cdot 1,15^x$ | f) $f(x) = 4 \cdot 0,25^x$ | h) $f(x) = 2,04 \cdot 0,34^x$ |

1.15 Auf das Wievielfache wächst bzw. fällt $f(x)$, wenn x um 5 erhöht wird?

- | | | | |
|-----------------|------------------------------|-------------------|-----------------------------|
| a) $f(x) = 3^x$ | c) $f(x) = 0,5 \cdot 12,1^x$ | e) $f(x) = 0,6^x$ | g) $f(x) = 14 \cdot 0,95^x$ |
|-----------------|------------------------------|-------------------|-----------------------------|

- b) $f(x) = 4 \cdot 2^x$ d) $f(x) = 1,11 \cdot 1,02^x$ f) $f(x) = 3 \cdot 0,12^x$ h) $f(x) = 3,77 \cdot 0,18^x$
- 1.16** Die Bevölkerung einer Stadt wächst in einem bestimmten Zeitraum annähernd exponentiell nach dem folgenden Wachstumsgesetz. Dabei ist $E(t)$ die Einwohnerzahl nach t Jahren. Wie viele Einwohner sind zu Beginn vorhanden? Um wie viel Prozent nimmt die Einwohnerzahl jährlich zu?
- a) $N(t) = 1200 \cdot 1,05^t$ c) $N(t) = 3900 \cdot 1,09^t$ e) $N(t) = 10\,500 \cdot 1,1^t$
b) $N(t) = 2850 \cdot 1,12^t$ d) $N(t) = 4100 \cdot 1,14^t$ f) $N(t) = 15\,000 \cdot 1,17^t$
- 1.17** Eine ansteckende Krankheit breitet sich in einem kurzen Zeitraum annähernd exponentiell aus. Für die Anzahl $N(t)$ der Erkrankten nach t Tagen gilt ungefähr: $N(t) = 2 \cdot 1,01^t$.
- a) Was bedeuten die Zahlen 2 und 1,01?
b) Auf das Wievielfache steigt die Anzahl der Erkrankten pro Tag?
c) Um wie viel Prozent nimmt die Anzahl der Erkrankten pro Tag zu?
d) Auf das Wievielfache steigt die Anzahl der Erkrankten in 10 Tagen?
e) Um wie viel Prozent nimmt die Anzahl der Erkrankten in 10 Tagen zu?
- 1.18** Wir nehmen an, dass sich die Seerosen in einem Teich während eines kurzen Zeitraums annähernd exponentiell vermehren. Nach t Tagen nehmen sie ungefähr den Flächeninhalt $A(t) = 20 \cdot 1,11^t$ (m^2) ein.
- a) Welchen Flächeninhalt nehmen die Seerosen zu Beginn ein?
b) Auf das Wievielfache steigt der Flächeninhalt pro Tag?
c) Um wie viel Prozent nimmt der Flächeninhalt täglich zu?
d) Auf das Wievielfache steigt der Flächeninhalt in einer Woche? Wie groß ist er in einer Woche?
e) Um wie viel Prozent steigt der Flächeninhalt in einer Woche?
f) Zeichne den Graphen der Funktion $A: t \mapsto A(t)$ für $0 \leq t \leq 7$ (Computer!).
- 1.19** Ein bestimmtes Pulver löst sich in Wasser so auf, dass nach t Sekunden nur mehr $N(t) = 100 \cdot 0,9^t$ Gramm des ungelösten Pulvers vorhanden sind.
- a) Wie viel Pulver wurde in das Wasser geschüttet?
b) Auf welchen Bruchteil sinkt die Menge ungelösten Pulvers pro Sekunde?
c) Um wie viel Prozent nimmt die Menge ungelösten Pulvers pro Sekunde ab?
d) Auf welchen Bruchteil sinkt die Menge ungelösten Pulvers in einer Minute?
e) Um wie viel Prozent nimmt die Menge ungelösten Pulvers pro Minute ab?
- 1.20** Ein Körper wird in einen Kühlraum gestellt, in dem eine Temperatur von 0°C herrscht. Der Körper kühlt sich exponentiell ab, wobei für seine Temperatur $T(t)$ nach t Minuten gilt: $T(t) = 65 \cdot 0,87^t$ ($^\circ\text{C}$).
- a) Welche Temperatur hat der Körper zu Beginn?
b) Auf welchen Bruchteil sinkt die Temperatur des Körpers pro Minute? Auf welchen Bruchteil in 5 Minuten?
c) Um wie viel Prozent nimmt die Temperatur pro Minute ab? Um wie viel Prozent in 10 Minuten?
d) Zeichne den Graphen der Funktion $T: t \mapsto T(t)$ für $0 \leq t \leq 10$ (Computer!).
- 1.21** Der Baumbestand eines Waldes nimmt erfahrungsgemäß um ca. 12% pro Jahr zu. Zu Beginn sind 268 Bäume im Wald. Es sei $A(t)$ die Anzahl der Bäume nach t Jahren.
- a) Ermittle eine Termdarstellung der Funktion $A: t \mapsto A(t)$ und zeichne ihren Graphen für $0 \leq t \leq 10$ (Computer!).
b) Wie viele Bäume sind nach 10 Jahren im Wald?
- 1.22** Das radioaktive Element Wismut 210 zerfällt annähernd nach dem Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \cdot 0,87^t$ ($N(t)$ in Gramm, t in Jahren).
- a) Auf welchen Bruchteil sinkt die Wismutmenge pro Jahr bzw. in zwei Jahren ab?
b) Um wie viel Prozent nimmt die Wismutmenge jährlich bzw. in 10 Jahren ab?
c) Zeichne den Graphen der Funktion $N: t \mapsto N(t)$, wenn zu Beginn 100 Gramm Wismut

vorhanden sind (Computer!).

1.23 Ein bestimmter Bakterienstamm auf einer Nährlösung nimmt stündlich um ca. 11% zu. Zu Beginn zählt man ca. 600 Bakterien. Es sei $A(t)$ die Anzahl der Bakterien nach t Stunden.

a) Ermittle eine Termdarstellung der Funktion $A: t \mapsto A(t)$ und zeichne ihren Graphen für $0 \leq t \leq 8$.

b) Wie viele Bakterien sind nach 8 Stunden vorhanden?

1.24 Beim radioaktiven Element Thallium 210 nimmt die Anzahl der unzerfallenen Atome pro Minute um ca. 5% ab.

a) Gib das Zerfallsgesetz an, wenn zu Beginn 10^9 Atome vorhanden sind.

b) Wie viele unzerfallene Atome sind nach 100 Minuten noch vorhanden?

1.25 Beim radioaktiven Element Blei 206 nimmt die Anzahl der unzerfallenen Atome pro Tag um ca. 0,5% ab.

a) Gib das Zerfallsgesetz an, wenn zu Beginn 10^{12} Atome vorhanden sind?

b) Wie viele unzerfallene Atome sind nach 10 Jahren noch ungefähr vorhanden? (Rechne 1 Jahr mit 365 Tagen.)

1.3 „Anwendungen“ aus technischen Gründen leider nicht möglich!!

1.4 Vergleich von linearen Funktionen und Exponentialfunktionen

Man versteht sowohl die linearen Funktionen als auch die Exponentialfunktionen besser, wenn man sie miteinander vergleicht. Dabei stellen sich auffallende Analogien, aber auch Unterschiede heraus.

Lineares Wachsen

$$f(x) = k \cdot x + d \text{ (mit } k > 0 \text{)}$$

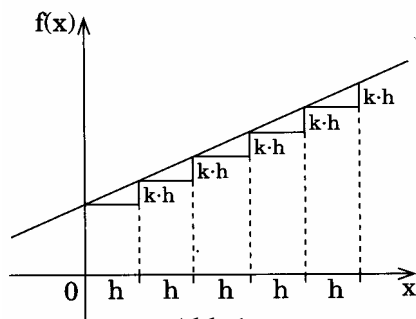


Abb.1a

Gleiche Zunahme der Argumente (um h) bewirkt gleiche Zunahme der Funktionswerte (um $k \cdot h$):

$$f(x+h) = f(x) + k \cdot h$$

Die Änderung (Differenz) $f(x+h) - f(x)$ der Funktionswerte hängt nur von der Intervalllänge h , aber nicht von der Stelle x ab:
 $f(x+h) - f(x) = k \cdot h$

Der Änderungsfaktor (Quotient der Funktionswerte) $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ hängt von der Intervalllänge h und der Stelle x ab.

Die relative Änderung $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}$ hängt von der Intervalllänge h und von der Stelle x ab.

Exponentielles Wachsen

$$f(x) = c \cdot a^x \text{ (mit } a > 1 \text{)}$$

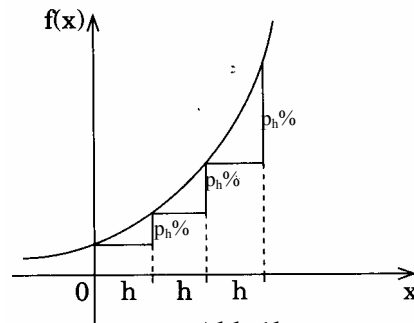


Abb.1b

Gleiche Zunahme der Argumente (um h) bewirkt Zunahme der Funktionswerte mit dem gleichen Faktor (a^h) bzw. um den gleichen Prozentsatz (p_h):

$$f(x+h) = f(x) \cdot a^h = f(x) \cdot \left(1 + \frac{p_h}{100}\right)$$

Die Änderung (Differenz) $f(x+h) - f(x)$ der Funktionswerte hängt von der Intervalllänge h und der Stelle x ab.

Der Änderungsfaktor (Quotient der Funktionswerte) $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ hängt nur von der Intervalllänge h , aber nicht von der Stelle x ab:

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$$

Die relative Änderung $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}$ hängt nur von der Intervalllänge h , aber nicht von der Stelle x ab:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} = a^h - 1$$

Der Differenzenquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ist konstant, hängt also weder von der Intervalllänge h noch von der Stelle x ab:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k$$

Der Differenzenquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ hängt von der Intervalllänge h und der Stelle x ab.

Exponentielle Katastrophen

Wir vergleichen mit Hilfe eines Computers die Exponentialfunktion f mit $f(x) = 1,1^x$ mit der linearen Funktion g mit $g(x) = 10 \cdot x$. Es sieht zunächst so aus, als ob die lineare Funktion g wesentlich schneller wachse als die Exponentialfunktion f (Abb.2a). Durch Zoomen auf dem Computer kann man jedoch einen größeren Ausschnitt des Koordinatensystems erfassen und stellt fest, dass die Exponentialfunktion f der linearen Funktion g immer näher kommt und diese schließlich übertrifft (Abb.2b).

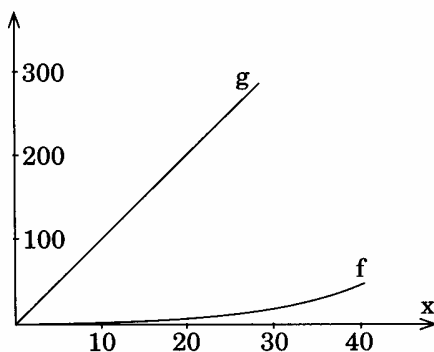


Abb.2a Die lineare Funktion g wächst nur ...

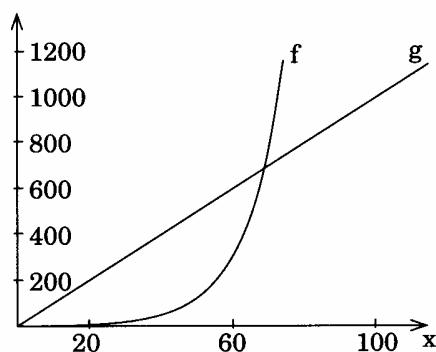


Abb.2b ... scheinbar wesentlich schneller als die Exponentialfunktion f

Etwas Ähnliches beobachtet man, wenn man die Exponentialfunktion f mit $f(x) = 1,1^x$ mit der Potenzfunktion g mit $g(x) = x^3$ vergleicht (Abb.3a,b).

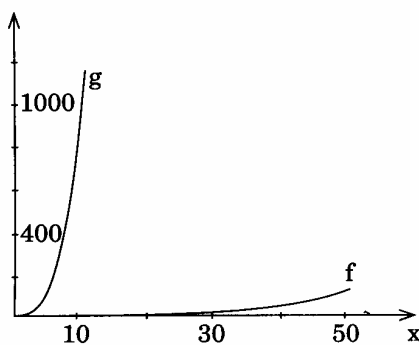


Abb.3a Auch die Potenzfunktion g wächst nur ...

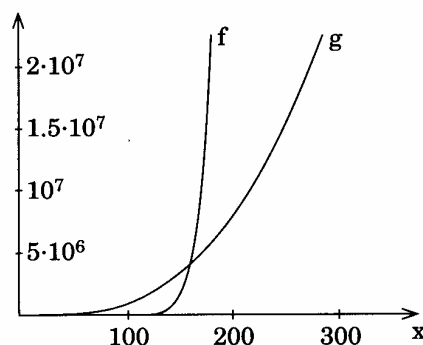


Abb.3b ... im ersten Augenblick schneller als die Exponentialfunktion

Man kann beweisen, dass eine Exponentialfunktion jede Polynomfunktion (und damit auch jede lineare Funktion und jede Potenzfunktion) bei genügend großem x übertrifft. Der Beweis ist jedoch schwierig und kann hier nicht geführt werden.

Das Heimtückische an exponentiellen Wachstumsprozessen liegt darin, dass sie anfänglich meist unterschätzt werden, weil das Wachstum zunächst langsam und beinahe linear verläuft (z.B. Bevölkerungswachstum). Man glaubt also, dass es immer so harmlos weitergehen wird, doch kommt es früher oder später zu einer „Explosion“ und damit zu einer Katastrophe.

1.5 Rekursive Darstellung von Exponentialfunktionen

Ein Kapital von 1000 Euro wird jährlich mit 2% verzinst. Wir betrachten die Funktion, die jedem Zeitpunkt n (in Jahren) das Kapital $K(n)$ (in Euro) zuordnet. Man kann die Werte dieser Funktion auf zwei Arten berechnen:

1. Art

$$\begin{aligned} K(0) &= 1000 \\ K(1) &= 1000 \cdot 1,02 = 1020 \\ K(2) &= 1000 \cdot 1,02^2 = 1040,40 \\ K(3) &= 1000 \cdot 1,02^3 \approx 1061,21 \\ K(4) &= 1000 \cdot 1,02^4 \approx 1082,43 \end{aligned}$$

Allgemein:

$$\begin{aligned} \mathbf{K(n) = 1000 \cdot 1,02^n} \\ \text{für } n = 1, 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

2. Art

$$\begin{aligned} K(0) &= 1000 \\ K(1) &= K(0) \cdot 1,02 = 1000 \cdot 1,02 = 1020 \\ K(2) &= K(1) \cdot 1,02 = 1020 \cdot 1,02 = 1040,40 \\ K(3) &= K(2) \cdot 1,02 = 1040,40 \cdot 1,02 \approx 1061,21 \\ K(4) &= K(3) \cdot 1,02 \approx 1061,21 \cdot 1,02 \approx 1082,43 \end{aligned}$$

Allgemein:

$$\begin{aligned} \mathbf{K(0) = 0 \text{ und } K(n+1) = K(n) \cdot 1,02} \\ \text{für } n = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Abb.1a

Abb.1b

Die erste Art der Darstellung entspricht der bisher verwendeten Termdarstellung einer Exponentialfunktion. Die zweite Art der Darstellung ist eine **rekursive Darstellung**. Mit Hilfe der **Rekursionsgleichung** $K(n+1) = K(n) \cdot 1,02$ kann man jeweils aus $K(n)$ den nächsten Wert $K(n+1)$ berechnen, wobei man von der **Anfangsbedingung** $K(0) = 1000$ ausgeht.

1.70 Gib Vor- und Nachteile dieser beiden Darstellungen an.

Lösung: Die rekursive Darstellung hat den Vorteil, dass das Anfangskapital und der jährliche Aufzinsungsfaktor unmittelbar ersichtlich sind:

$$K(0) = \boxed{1000} \quad \text{und} \quad \boxed{K(n+1)} = \boxed{K(n)} \cdot \boxed{1,02}$$

Anfangskapital
Kapital nach (n+1) Jahren
Kapital nach n Jahren
Aufzinsungsfaktor

Diese Darstellung hat jedoch den Nachteil, dass man die Werte $K(n)$ nur der Reihe nach, also für $n=1,2,3,\dots$ berechnen kann. Um beispielsweise $K(100)$ auszurechnen, müsste man der Reihe nach $K(0), K(1), K(2), \dots, K(100)$ ausrechnen. Die Termdarstellung $K(n) = 1000 \cdot 1,02^n$ hat diesen Nachteil nicht. Man kann direkt berechnen: $K(100) = 1000 \cdot 1,02^{100} \approx 7244,65$. Allerdings kann man aus dieser Darstellung das Anfangskapital und den Aufzinsungsfaktor nicht unmittelbar erkennen (man muss dazu einige einfache Überlegungen durchführen).

- 1.71** Zeige, dass man die rekursive Darstellung $K(0) = 1000$ und $K(n+1) = K(n) \cdot 1,02$ aus der Termdarstellung $K(n) = 1000 \cdot 1,02^n$ herleiten kann.

Lösung: Aus $K(n) = 1000 \cdot 1,02^n$ ergibt sich:

$$\underline{K(0)} = 1000 \cdot 1,02^0 = \underline{1000} \quad \text{und} \quad \underline{K(n+1)} = 1000 \cdot 1,02^{n+1} = 1000 \cdot 1,02^n \cdot 1,02 = \underline{K(n) \cdot 1,02}$$

Grundaufgaben

- 1.72** Eine Ware kostet derzeit 500 Euro. Wir nehmen an, dass der Preis der Ware jährlich um 3% zunimmt. Es sei $P(n)$ der Preis der Ware nach n Jahren.
- Gib eine Termdarstellung und eine rekursive Darstellung für $P(n)$ an.
 - Veranschauliche beide Darstellungen durch Punktdiagramme für $n = 0,1,2,3,4$ (wie in Abb.1a,b).
- 1.73** Eine Firma produziert derzeit pro Jahr 2000 Stück einer Ware. Die Firmenleitung ist bestrebt, die Produktionszahl pro Jahr um mindestens 1,5% zu steigern. Es sei $S(n)$ die Stückzahl, die nach n Jahren mindestens produziert werden muss. Gib eine Termdarstellung und eine rekursive Darstellung für $S(n)$ an. Zeichne den Graphen der Funktion $S: n \mapsto S(n)$ für $n = 0,1,2,3,4$.
- 1.74** Ein Untertan erbat sich von seinem König als Lohn für seine guten Taten so viele Reiskörner, wie auf dem letzten Feld eines Schachbrettes liegen, wenn auf dem ersten Feld ein Reiskorn und auf jedem weiteren Feld doppelt so viele Reiskörner wie auf dem vorangegangenen Feld liegen. Es sei $R(n)$ die Anzahl der Reiskörner auf dem n -ten Feld.
- Gib eine Termdarstellung und eine rekursive Darstellung für $R(n)$ an.
 - Berechne mit Hilfe beider Darstellungen $R(n)$ für die ersten acht Felder des Schachbrettes.
 - Wie viele Reiskörner möchte der Untertan haben? Wenn ein Reiskorn ungefähr 2 mg wiegt, wie viel Kilogramm Reis wären das?
- 1.75** Ein bestimmtes Auto kostet neu 248 000 Euro und verliert jährlich 25% an Wert. Es sei $P(n)$ der Wert des Autos nach n Jahren.
- Gib eine Termdarstellung und eine rekursive Darstellung für $P(n)$ an.
 - Berechne mit Hilfe beider Darstellungen den Wert des Autos nach 0,1,2,3,4 Jahren. Wie viel verliert das Auto im ersten Jahr an Wert, wie viel im vierten Jahr?
 - Berechne mit Hilfe beider Darstellungen, nach wie vielen Jahren der Wert des Autos unter ein Fünftel des Neuwertes sinkt.