

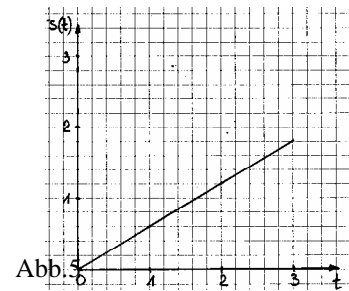
## Direkte Proportionalitätsfunktion

Ü) In Abb.5 ist die Zeit-Ort-Funktion eines Radfahrers dargestellt.

- a) Gib eine Termdarstellung dieser Funktion an.  
 b) Ist der zurückgelegte Weg  $s(t)$  direkt proportional zur Zeit  $t$ ?  
 Wenn ja, gib den Proportionalitätsfaktor an und erkläre, was er bedeutet.

- c) Übertrage die Abbildung in das Heft und zeichne die Zeit-Ort-Funktion eines zweiten Radfahrers ein, der gleichzeitig mit dem ersten startet, aber mit doppelter Geschwindigkeit fährt.

- d) Erläutere an Skizzen die Beziehungen  $s(2t) = 2 \cdot s(t)$  und  $s(t_1 + t_2) = s(t_1) + s(t_2)$ .



## Lineare Funktionen

1) Ermittle zwei Punkte des Graphen der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und zeichne den Graphen:

- a)  $f(x) = 2x + 1$       c)  $f(x) = 3x - 5$       e)  $f(x) = -0,5x + 0,5$       g)  $f(x) = 3$   
 b)  $f(x) = 2x - 3$       d)  $f(x) = -2x + 4$       f)  $f(x) = 0,5x - 2,5$       h)  $f(x) = -1$

3) Die Wertabnahme von Maschinen geht häufig nichtlinear vor sich (z.B. bei Autos). Das Finanzamt geht jedoch bei Steuerberechnungen meist von der Annahme aus, dass der Wert einer Maschine linear abnimmt (z.B. bei Computern). Eine Maschine koste 30 000 Euro und verliere jährlich 6000 Euro an Wert.

- a) Lege eine Tabelle an, die den Wert der Maschine 0,1,2,3,... Jahre nach dem Kauf angibt. Nach wie vielen Jahren ist der Wert der Maschine auf 0 abgesunken?  
 b) Die Funktion  $W$  ordne jedem Zeitpunkt  $t$  (in Jahren nach dem Kauf) den Wert  $W(t)$  der Maschine zu. Gib eine Termdarstellung der Funktion  $W$  an.  
 c) Zeichne ein Punktdiagramm für die Funktion  $W$ . Ist es sinnvoll, die Punkte durch eine Gerade zu verbinden? Begründe.

## Übungen

1) Beantworte für die folgende Funktion  $f$ , ohne zu rechnen: Um wie viel wächst bzw. fällt  $f(x)$ , wenn  $x$  um 1 erhöht wird?

- a)  $f(x) = 2x + 1$       c)  $f(x) = -5x + 6$       e)  $f(x) = 1,8x + 0,5$       g)  $f(x) = x$   
 b)  $f(x) = 3x - 4$       d)  $f(x) = -4x - 10$       f)  $f(x) = -0,5x + 1,8$       h)  $f(x) = x$

2) Beantworte für die folgende Funktion  $f$ , ohne zu rechnen: Wievielfach schneller wächst  $f(x)$  als  $x$ , wenn  $x$  erhöht wird?

- a)  $f(x) = 3x + 1$       c)  $f(x) = 7x - 2$       e)  $f(x) = 1,5x + 4$       g)  $f(x) = 13,2x$   
 b)  $f(x) = 4x + 11$       d)  $f(x) = 12x + 9$       f)  $f(x) = 3,4x - 1,2$       h)  $f(x) = 1000x$

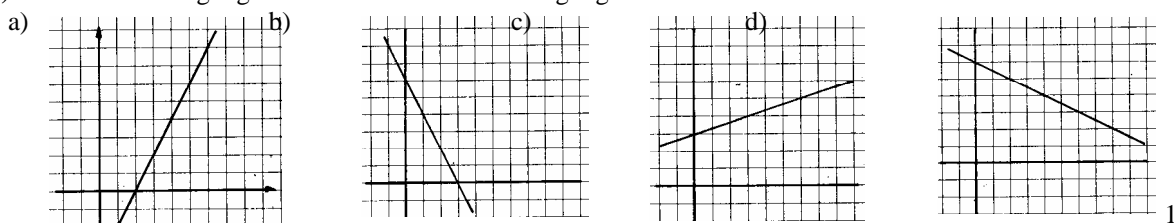
3) Beantworte für die folgende Funktion  $f$ , ohne zu rechnen: Wenn  $x$  erhöht wird, in welchem Verhältnis steht die Erhöhung von  $f(x)$  zur Erhöhung von  $x$ ?

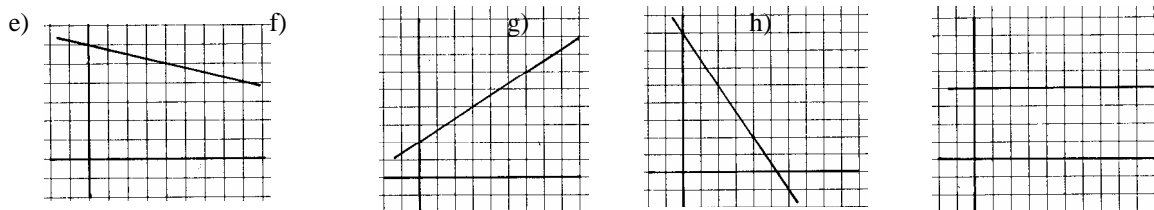
- a)  $f(x) = \frac{2}{3}x + 7$       c)  $f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$       e)  $f(x) = \frac{7}{3}x + 14$       g)  $f(x) = 2x - 45$   
 b)  $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$       d)  $f(x) = \frac{7}{10}x - \frac{9}{10}$       f)  $f(x) = \frac{11}{13}x - \frac{5}{13}$       h)  $f(x) = 9x + \frac{1}{9}$

4) Die folgende Formel gilt für eine direkte Proportionalitätsfunktion  $f$ . Gilt sie auch für eine beliebige lineare Funktion  $f$ ? Begründe.

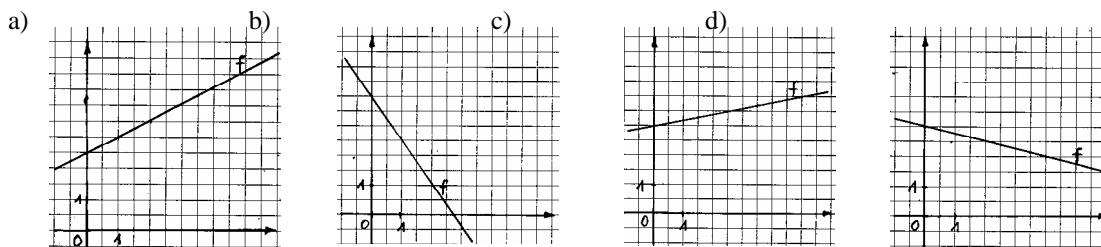
- a)  $f(1) = k$       b)  $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$       c)  $f(x+y) = f(x) + f(y)$

5) Zeichne ein Steigungsdreieck ein und lies die Steigung der Geraden ab:





- 6) In der folgenden Abbildung ist der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = k \cdot x + d$  dargestellt. Lies  $k$  und  $d$  ab.



- 7) Der Graph der linearen Funktion  $f$  geht durch den Punkt  $P$  und hat die Steigung  $k$ . Zeichne den Graphen mit Hilfe eines Steigungsdreiecks.

- a)  $P = (0/2)$ ,  $k = \frac{1}{2}$    c)  $P = (0/5)$ ,  $k = -1$    e)  $P = (1/1)$ ,  $k = \frac{4}{7}$    g)  $P = (-1/1)$ ,  $k = \frac{3}{2}$   
b)  $P = (0/-3)$ ,  $k = \frac{3}{5}$    d)  $P = (0/-1)$ ,  $k = -\frac{1}{2}$    f)  $P = (1/-1)$ ,  $k = -\frac{2}{3}$    h)  $P = (-1/-1)$ ,  $k = 2$

- 8) Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen im Intervall  $[-4;4]$ . Was fällt auf?

$$f_1(x) = 3x - 2 \quad f_3(x) = \frac{1}{2}x - 2 \quad f_5(x) = -\frac{1}{2}x - 2$$

$$f_2(x) = x - 2 \quad f_4(x) = -2x - 2 \quad f_6(x) = 0 \cdot x - 2$$

- 9) Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen im Intervall  $[-4;4]$ . Was fällt auf?

$$f_1(x) = 1,5x \quad f_3(x) = 1,5x - 2 \quad f_5(x) = 1,5x - 3$$

$$f_2(x) = 1,5x + 2 \quad f_4(x) = 1,5x + 3 \quad f_6(x) = 1,5x - 4,5$$

- 10) Von welchen der folgenden Funktionen sind in Abb.9 die Graphen gezeichnet? Zeichne die Graphen der fehlenden Funktionen.

$$f(x) = 2x + 1 \quad h(x) = -x + 3$$

$$g(x) = 0,5x - 0,5 \quad m(x) = -x + 1,5$$

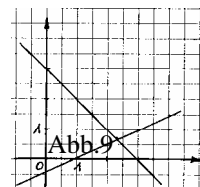
- 11) Bestimme die Schnittpunkte des Graphen von  $f$  mit den Achsen.

$$a) f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \quad c) f(x) = \frac{2}{5}x - 2 \quad e) f(x) = \frac{3}{4}x$$

$$b) f(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \quad d) f(x) = -x - 1 \quad f) f(x) = -\frac{1}{6}x + 4$$

- 12) Vom Graphen einer linearen Funktion  $f$  kennt man die folgenden beiden Punkte. Gib eine Termdarstellung von  $f$  an.

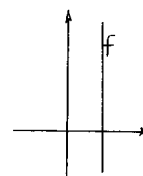
- a)  $(2/-3)$ ,  $(7/7)$    c)  $(0/2)$ ,  $(1/5)$    e)  $(-3/12)$ ,  $(1/4)$    g)  $(2/-3,5)$ ,  $(4/-8,5)$   
b)  $(-1/-3)$ ,  $(4/7)$    d)  $(2/-3)$ ,  $(-2/13)$    f)  $(1/0)$ ,  $(3/3)$    h)  $(-5/-15)$ ,  $(2/6)$



- 13) Von einer linearen Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  weiß man: Multipliziert man die Änderung der Argumente mit 3, so erhält man die „Änderung der Funktionswerte“. Außerdem enthält der Graph der Funktion  $f$  den Punkt  $(0/0)$ . Gib eine Termdarstellung für  $f$  an.

- 14) Ist in Abb.7 der Graph einer linearen Funktion dargestellt? Begründe.

Abb.7



Ergänzungen zu den Eigenschaften 1), 2) und 3) der linearen Funktion:

Fasst man diese Formeln in Worte, ergeben sich drei wichtige Deutungen der Steigung  $k$ :

#### Deutungen der Steigung

- (1) Die Steigung einer linearen Funktion ist gleich der Änderung der Funktionswerte bei Vermehrung des Arguments um 1 (*Einheitsdeutung der Steigung*).
- (2) Die Steigung einer linearen Funktion ist gleich dem Faktor, mit dem die Änderung der Argumente multipliziert werden muss, um die Änderung der Funktionswerte zu erhalten (*Faktordeutung der Steigung*).
- (3) Die Steigung einer linearen Funktion ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente (*Verhältnisdeutung der Steigung*).

Die Formel (1) ist in Abb.3a,b veranschaulicht, die Formel (2) in Abb.4a,b, die Formel (3) in Abb.5a,b.

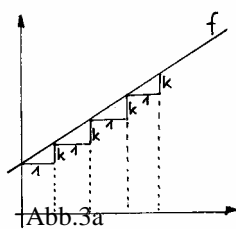


Abb.3a

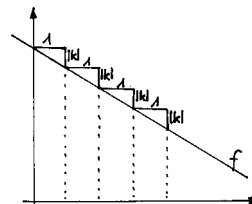


Abb.3b

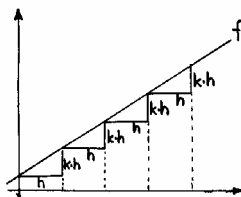


Abb.4a

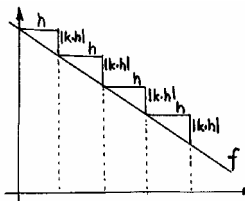


Abb.4b

Man kann die Formel (2) auch so aussprechen:

Lineares Wachsen (Abnehmen) bedeutet: Gleiche Zunahme der Argumente (um  $h$ ) bewirkt stets gleiche Zunahme (Abnahme) der Funktionswerte (um  $k \cdot h$ ).

## Anwendungen linearer Funktionen

### Zeit-Ort-Funktionen

- 1) Abb.1 zeigt das Zeit-Ort-Diagramm eines Autos, das auf einer wenig befahrenen Autobahn mit annähernd konstanter Geschwindigkeit fährt ( $t$  in h,  $s(t)$  in km/h).
  - a) Wie groß ist  $s(0)$ ? Was bedeutet  $s(0)$ ?
  - b) Wie lange dauert die Fahrt und welchen Weg legt das Auto dabei zurück?
  - c) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Autos? Wie kann diese aus dem Graphen abgelesen werden?
  - d) Wie kann man die Steigung der Geraden noch interpretieren?

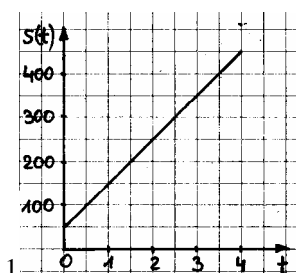


Abb.1

## Kosten- und Gebührenfunktionen

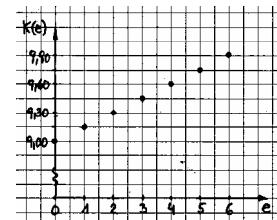
Die Produktionskosten einer Ware setzen sich aus zwei Teilen zusammen:

- aus **fixen Kosten**, die von der Produktionsmenge unabhängig sind, wie z.B. Kosten zur Aufrechterhaltung der Produktion, der Lagerhaltung usw.
- aus **variablen Kosten**, die von der Produktionsmenge abhängen, wie z.B. Materialkosten, Lohnkosten usw.

- In einem Betrieb werden Rohre erzeugt. Die fixen Kosten für diese Produktion betragen 10 000 Euro, die variablen Kosten betragen 5 Euro pro Meter erzeugten Rohres.
  - Berechne die Produktionskosten (in Euro) für die Produktion von 0, 1000, 2000, 3000 bzw.  $x$  Meter Rohr. Lege eine Tabelle an.
  - Es sei  $K$  die Funktion, die jeder Rohrlänge  $x$  die gesamten Produktionskosten  $K(x)$  zuordnet ( $x$  in m,  $K(x)$  in Euro). Gib eine Termdarstellung dieser Funktion an und zeichne ihren Graphen.

- In Abb.3 sind die monatlichen Handykosten  $K(e)$  in Abhängigkeit von der Anzahl  $e$  der verbrauchten Einheiten dargestellt.
  - Wie groß ist  $K(0)$ ? Welche Bedeutung hat  $K(0)$ ?
  - Wie groß ist die Steigung der Geraden, auf der die Punkte liegen. Gib eine Deutung dieser Steigung an.
  - Wenn man mehr telefoniert, wievielfach schneller steigen dann die Handykosten an als die verbrauchten Einheiten?

Abb.3



- In einer Großstadt gilt folgende Regel für Taxifahrten. Unabhängig von der Fahrstrecke zahlt man eine Grundgebühr von 1 Euro, für jeden Kilometer zahlt man zusätzlich 0,8 Euro. (Der Tachometer zeigt nur ganze Kilometer an.)
  - Zeichne ein Punktdiagramm.
  - Wie groß ist die Steigung der Geraden, auf der die Punkte liegen?
  - Wenn man weiter fährt als geplant, in welchem Verhältnis steht dann die Erhöhung des Rechnungsbetrages zur Erhöhung der Kilometeranzahl?
  - Wenn man das Taxi telefonisch bestellt, zahlt man zusätzlich zur Grundgebühr noch eine Anfahrgeld von 1 Euro. Wie sieht jetzt das Punktdiagramm aus? Zeichne die neuen Punkte in das unter a) angefertigte Diagramm ein.
- Ein Bahnkilometer kostet 0,1 Euro. Für eine Platzreservierung zahlt man pro Fahrt 10 Euro. Die Funktion  $P$  ordne jeder Fahrtlänge  $s$  den Preis  $P(s)$  ohne Platzreservierung, die Funktion  $Q$  ordne jeder Fahrtlänge  $s$  den Preis  $Q(s)$  mit Platzreservierung zu, wobei  $s \in \mathbb{N}$  vorausgesetzt wird. Gib Termdarstellungen der Funktionen  $P$  und  $Q$  an und zeichne ihre Graphen.

- Eine Badewanne wird gleichmäßig mit Wasser voll gefüllt. Die Abhängigkeit des in der Wanne befindlichen Wasservolumens  $V(t)$  (in Liter) von der Zeit  $t$  (in Minuten) ist in Abb.4 dargestellt.

- Was bedeuten die Zahlen  $a, b, c$ ?
- Wie groß ist die Steigung der Geraden?
- Wie viel Liter Wasser fließen pro Minute zu?
- Fließt in der doppelten Zeit die doppelte Wassermenge zu?
- Verdoppelt sich in der doppelten Zeit das Volumen des Wassers in der Wanne?
- Übertrage die Abbildung in das Heft. Wie ändert sich der Graph, wenn pro Minute doppelt so viel Wasser zufließt? Zeichne diesen Graphen in die Abbildung ein. Zeichne auch den Zeitpunkt ein, zu dem in diesem Fall die Wanne voll wäre. Ist die Wanne in der halben Zeit voll wie vorhin?

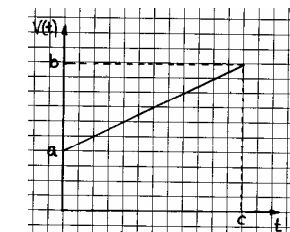
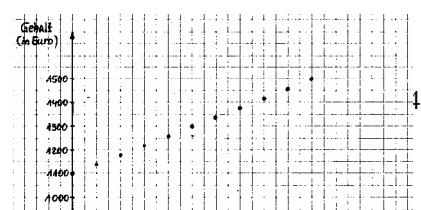


Abb.4

- Das Gehalt eines Staubsaugerververtreters setzt sich folgendermaßen zusammen. Er erhält monatlich



ein gewisses Fixum (unabhängig davon, ob er einen Staubsauger verkauft oder nicht). Für jeden verkauften Staubsauger erhält er eine zusätzliche Provision.

- a) Entnimm aus dem Graphen in Abb.5 die Höhe des Fixums und der Provision pro Staubsauger.
- b) Der Vertreter beschließt, mehr zu arbeiten und hofft, dabei mehr zu verkaufen. In welchem Verhältnis steht seine Verdiensterhöhung zur Erhöhung der Verkaufszahl? Abb.5
- c) Wie viel verdient der Vertreter mehr, wenn er 10 Staubsauger mehr verkauft?
- d) Verdient der Vertreter das Doppelte, wenn er doppelt so viele Staubsauger verkauft? Begründe.